Beispiel 27e. Für $X = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x > 0\}$, $f(x,y) = (\cosh(x)\cos(y), \sinh(x)\sin(y))$, bestimme $Y := f(X)$ und f^{-1}. Ferner entscheide, ob $f \in \mathrm{Diff}^q_{\mathrm{loc}}(X, \boldsymbol{R}^2)$ oder $f \in \mathrm{Diff}^q(X, Y)$.

Lösung. Seien $u = \cosh(x)\cos(y)$ und $v = \sinh(x)\sin(y)$. Aus den Eigenschaften der trigonometrischen und hyperbolisch trigonometrischen Funktionen folgen:

$$1 = \frac{u^2}{\cosh^2(x)} + \frac{v^2}{\sinh^2(x)} = \frac{u^2}{\cosh^2(x)} + \frac{v^2}{\cosh^2(x)-1} = \frac{u^2}{1+\sinh^2(x)} + \frac{v^2}{\sinh^2(x)}$$

$$1 = \frac{u^2}{\cos^2(y)} - \frac{v^2}{\sin^2(y)} = \frac{u^2}{\cos^2(x)} - \frac{v^2}{1-\cos^2(x)} = \frac{u^2}{1-\sin^2(x)} - \frac{v^2}{\sin^2(x)}.$$

Das Auflösen dieser Gleichungen nach $\cosh^2(x)$ und $\cos^2(y)$ ergibt:

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{2}\left[(1+u^2+v^2) + \tau_1\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2}\right]$$

$$\cos^2(y) = \frac{1}{2}\left[(1+u^2+v^2) + \tau_2\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2}\right]$$

und nach $\sinh^2(x)$ und $\sin^2(y)$ ergibt:

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{2}\left[(u^2+v^2-1) + \tau_3\sqrt{(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2}\right]$$

$$\sin^2(y) = \frac{1}{2}\left[(1-u^2-v^2) + \tau_4\sqrt{(1-u^2-v^2)^2 + 4v^2}\right]$$

wobei $|\tau_1| = |\tau_2| = |\tau_3| = |\tau_4| = 1$. Mit $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = -1$,

$$\cosh(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+u^2+v^2) + \sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2}} \equiv A$$

$$\cos(y) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+u^2+v^2) - \sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2}} \equiv B$$

und $\sigma_1 = \mathrm{Signum}(u)$, und mit $\tau_3 = 1$, $\tau_4 = 1$,

$$\sinh(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2} + (u^2+v^2-1)} \equiv C$$

$$\sin(y) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2} - (u^2+v^2-1)} \equiv D$$

und $\sigma_2 = \mathrm{Signum}(v)$, kann man erforderte Eigenschaften zeigen. Zuerst gelten:

$$\begin{aligned}\cosh(x)\cos(y) &= \frac{\sigma_1}{2}\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - |(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2|}\\ &= \frac{\sigma_1}{2}\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - (1+u^2+v^2)^2 + 4u^2}\\ &= \frac{\sigma_1}{2}\sqrt{4u^2} = \mathrm{Signum}(u)|u| = u\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}\sinh(x)\sin(y) &= \frac{\sigma_2}{2}\sqrt{|(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2| - (u^2+v^2-1)^2}\\ &= \frac{\sigma_2}{2}\sqrt{(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2 - (u^2+v^2-1)^2}\\ &= \frac{\sigma_2}{2}\sqrt{4v^2} = \mathrm{Signum}(v)|v| = v.\end{aligned}$$

Um die Ungleichung $\cosh(x) \geq 1$ zu erfüllen, muss die Ungleichung $A \geq 1$ erfüllt werden, die man wie folgt beweisen kann:

$$0 \geq -4v^2$$

$$(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2 \geq 4 - 4(1+u^2+v^2) + (1+u^2+v^2)^2 = [2-(1+u^2+v^2)]^2$$

$$\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2} \geq |2-(1+u^2+v^2)| \geq 2-(1+u^2+v^2)$$

$$2A^2 = (1+u^2+v^2) + \sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2} \geq 2.$$

Um die Ungleichung $|\cos(y)| \leq 1$ zu erfüllen, muss die Ungleichung $B^2 \leq 1$ erfüllt werden, die man wie folgt beweisen kann:

$$-4v^2 \leq 0$$

$$[(1+u^2+v^2)-2]^2 = (1+u^2+v^2)^2 - 4(1+u^2+v^2) + 4 \leq (1+u^2+v^2)^2 - 4u^2$$

$$(1+u^2+v^2) - 2 \leq |(1+u^2+v^2)-2| \leq \sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2}$$

$$2B^2 = (1+u^2+v^2) - \sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2} \leq 2.$$

Um die Ungleichung $|\sin(y)| \leq 1$ zu erfüllen, muss die Ungleichung $D^2 \leq 1$ erfüllt werden, die man wie folgt beweisen kann:

$$0 \leq 4u^2$$

$$(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2 \leq [2+(u^2+v^2-1)]^2 = 4 + 4(u^2+v^2-1) + (u^2+v^2-1)^2$$

$$\sqrt{(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2} \leq 2 + (u^2+v^2-1) = 1+u^2+v^2 = |2+(u^2+v^2-1)|$$

$$2D^2 = \sqrt{(u^2+v^2-1)^2 + 4v^2} - (u^2+v^2-1) \leq 2.$$

Da die Ungleichung $x > 0$ erfüllt werden muss, muss die Ungleichungen $C, \sinh(x) > 0$ oder $A, \cosh(x) > 1$ erfüllt werden. Aus dem Beweis, daß $A \geq 1$ gilt, sieht man, daß $v = 0$ gilt wenn $A = 1$ gilt. Aus der folgenden Berechnung,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|u^2-1| + (u^2-1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-u^2)+(u^2-1)} = 0, & |u| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(u^2-1)+(u^2-1)} = \sqrt{u^2-1}, & |u| > 1 \end{cases}$$

sieht man, daß $v = 0$ und $|u| \leq 1$ ergeben $C = 0$ oder $\sinh(x) = 0$ und $x = 0$. Ansonsten ergibt $\sinh^{-1}(C)$ ein $x > 0$. Deshalb ist $Y = \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(u,v) : v = 0, |u| \leq 1\}$.

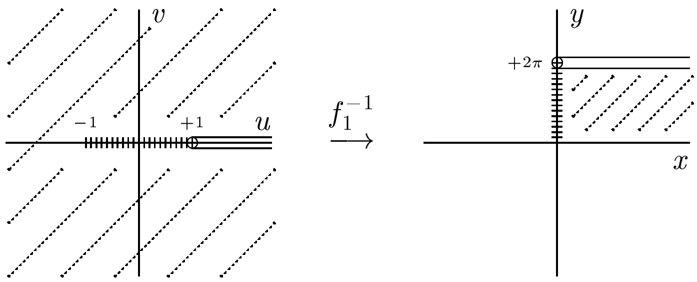
Nun definiere:

$$f_1^{-1}(u,v) = \begin{cases} x = \sinh^{-1}(C) \\ y = \tan^{-1}(D/B) + \begin{cases} 0, & B, D \geq 0 \\ \pi, & B < 0 \\ 2\pi, & B \geq 0, D < 0 \end{cases} \end{cases}$$

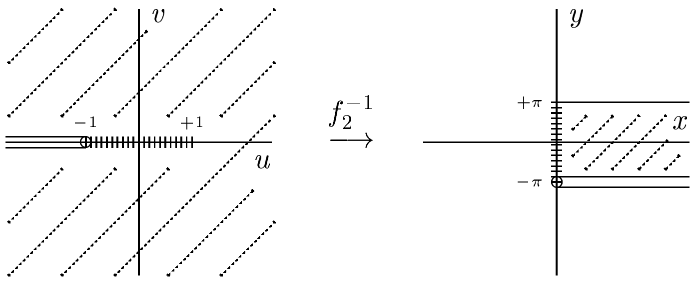
und:

$$f_2^{-1}(u,v) = \begin{cases} x = \sinh^{-1}(C) \\[2ex] y = \tan^{-1}(D/B) + \begin{cases} 0, & B \geq 0 \\ \pi, & B < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Der Bildbereich von f_1^{-1} kann wie folgt grafisch dargestellt werden:

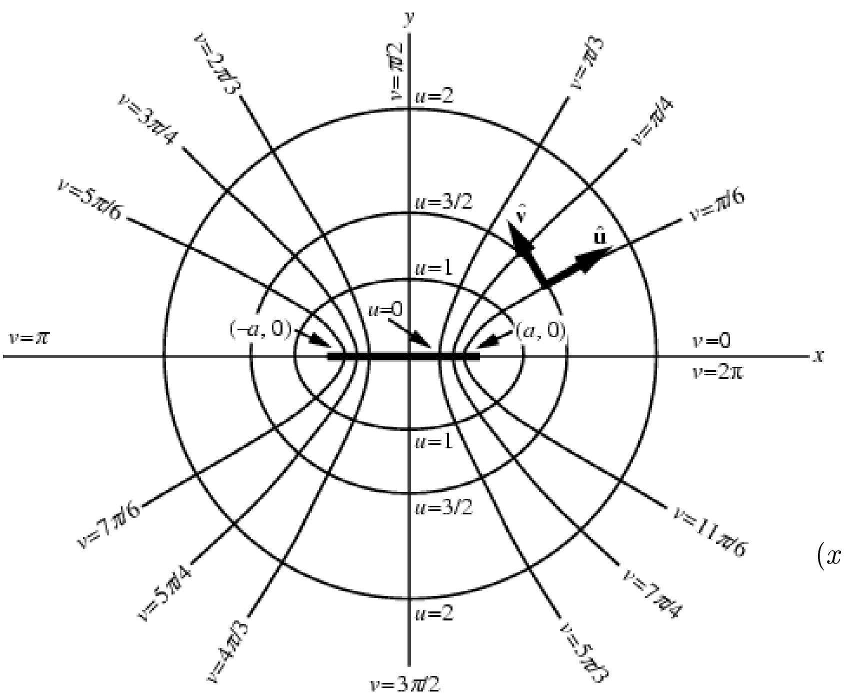


wobei f_1^{-1} auf der Menge $\{(u,v) : v = 0, u \geq -1\}$ nicht glatt ist. Der Bildbereich von f_2^{-1} kann wie folgt grafisch dargestellt werden:



wobei f_2^{-1} auf der Menge $\{(u,v) : v = 0, u \leq +1\}$ nicht glatt ist. Zwischen f_1^{-1} und f_2^{-1} gibt es nur das Gebiet $\{(u,v) : v = 0, |u| \leq 1\}$ worin eine Inverse von f nicht glatt ist. Deshalb gilt $f \in \mathrm{Diff}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(X,Y)$.

Auf der Webseite `http://mathworld.pdox.net/math/e/e088.htm` kann man ein bisschen über diese sogenannten *elliptische Zylinderkoordinaten* lesen:



Hier sind (x,y) und (u,v) umgekehrt!