Beispiel 27c. Für $X = \boldsymbol{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ bestimme $Y := f(X)$ und f^{-1}. Ferner entscheide, ob $f \in \mathrm{Diff}^q_{\mathrm{loc}}(X, \boldsymbol{R}^2)$ oder $f \in \mathrm{Diff}^q(X, Y)$.

Lösung. Definiere $z = x + iy$, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ und $w = u + iv$ so daß die folgenden gelten:

$$\begin{array}{rcl} z^2 &=& x^2 + 2ixy - y^2 \\ \bar{z}^2 &=& x^2 - 2ixy - y^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcccl} (z^2 + \bar{z}^2)/2 &=& x^2 - y^2 &=& u \\ (z^2 - \bar{z}^2)/(2i) &=& 2xy &=& v \end{array} \quad \Rightarrow \quad z^2 = u + iv = w$$

Um die Wurzel zu berechnen, wird die Polar-Darstellung verwendet:

$$w = u + iv = \sqrt{u^2 + v^2}\exp\left[i\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right].$$

Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} x + iy = z = \sqrt{w} = \sqrt{u + iv} &= [u^2 + v^2]^{\frac{1}{4}}\exp\left[\frac{i}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right] \\ &= [u^2 + v^2]^{\frac{1}{4}}\left\{\cos\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right] + i\sin\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Aus den Formeln:

$$\cos^2(\theta/2) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\theta)], \qquad \sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\theta)]$$

folgt:

$$\begin{aligned} x + iy = z = \sqrt{w} = \sqrt{u + iv} &= [u^2 + v^2]^{\frac{1}{4}}\left\{\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}} + i\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}}\right\} \\ &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u} + i\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u} \end{aligned}$$

wobei $\sigma_1, \sigma_2 \in \boldsymbol{R}$ mit $|\sigma_1| = |\sigma_2| = 1$. Nun mit $\sigma_1 = 1$ und $\sigma_2 = \mathrm{sgn}(v)$ und dann $\sigma_2 = 1$ und $\sigma_1 = \mathrm{sgn}(v)$ definiere:

$$f_1^{-1}(u,v) = \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u} \\ \\ y &=& \dfrac{\mathrm{sgn}(v)}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u} \end{array}\right. \qquad f_2^{-1}(u,v) = \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{\mathrm{sgn}(v)}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u} \\ \\ y &=& \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u} \end{array}\right.$$

In beiden Fällen folgen:

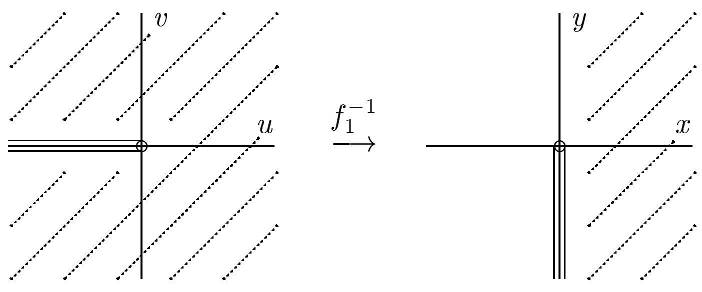
$$x^2 - y^2 = u \quad \text{und} \quad 2xy = v$$

oder:

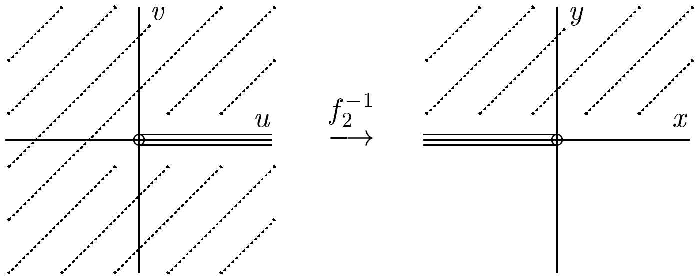
$$f(f_1^{-1}(u,v)) = (u,v) = f(f_2^{-1}(u,v)), \qquad \forall (u,v).$$

Deshalb für beliebiges $(u,v) \in \boldsymbol{R}^2$ gibt es ein $(x_1, y_1) = f_1^{-1}(u,v)$ (oder $(x_2, y_2) = f_2^{-1}(u,v)$) so daß $f(x_1, y_1) = (u,v)$ (oder $f(x_2, y_2) = (u,v)$) und $Y = X$.

Der Bildbereich von f_1^{-1} kann wie folgt grafisch dargestellt werden:



wobei f_1^{-1} auf der Menge $\{(u,v) : v = 0, u \leq 0\}$ nicht glatt ist. Der Bildbereich von f_2^{-1} kann wie folgt grafisch dargestellt werden:



wobei f_2^{-1} auf der Menge $\{(u,v) : v = 0, u \geq 0\}$ nicht glatt ist. Zwischen f_1^{-1} und f_2^{-1} gibt es nur einen Punkt worin eine Inverse von f nicht glatt ist: $(u,v) = (0,0)$. Deshalb gilt $f \in \mathrm{Diff}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(X,Y)$.