Beispiel 19. Sei $v \in L^2([-1,1])$ eine verrauschte Funktion. Sei u eine entrauschte Abschätzung von v mit $u \in L^2([-1,1])$ und $u' \in L^2([-1,1])$, die durch die Minimierung von

$$J(u) = \int_{-1}^{+1} [u(x) - v(x)]^2 dx + \mu \int_{-1}^{+1} [u'(x)]^2 dx$$

bestimmt wird. Mit einem äquidistanten Gitter $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \ldots, n$, $h = 2/n$, sei J_h eine Annährung von J:

$$J_h(\boldsymbol{u}) = h \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2 + h\mu \sum_{i=1}^{n-1} [(u_{i+1} - u_i)/h]^2$$

wobei $\boldsymbol{u} = \{u_i\}$, $u_i \approx u((x_{i-1} + x_i)/2)$, $\boldsymbol{v} = \{v_i\}$, und $v_i \approx v((x_{i-1} + x_i)/2)$.

1. Berechne die Richtungsableitungen von J. Mit einer Formel für die Richtungsableitungen finde die Fréchetsche Ableitung von J. Bestätige die Fréchetsche Ableitung mit der Definition.

2. Berechne den Gradient von J_h, z.B. mit $n = 3$ zuerst und dann für allgemeines n.

3. Charakterisiere den kritischen Punkt für J_h mit einer Gleichung $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, worin A eine Matrix ist, die von μ und h abhängt.

Lösung. Nenne den Hilbertraum H^1, in dem u sich befindet. Nach der Definition der Richtungsableitung, berechnet man für beliebiges $w \in H^1$:

$$D_w J(u) = \lim_{t \to 0} \frac{J(u + tw) - J(u)}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{-1}^{+1} [u(x) + tw(x) - v(x)]^2 + \mu[u'(x) + tw'(x)]^2 dx - \int_{-1}^{+1} [u(x) - v(x)]^2 + \mu[u'(x)]^2 dx \right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{-1}^{+1} [tw(x)][2u(x) + tw(x) - 2v(x)] + \mu[tw'(x)][2u'(x) + tw'(x)] dx \right\} =$$

$$\lim_{t \to 0} \left\{ 2 \int_{-1}^{+1} w(x)[u(x) - v(x)] + \mu w'(x)u'(x) dx + t \int_{-1}^{+1} [w(x)]^2 dx + t\mu \int_{-1}^{+1} [w'(x)]^2 dx \right\}$$

$$= 2 \int_{-1}^{+1} \{w(x)[u(x) - v(x)] + \mu w'(x)u'(x)\} dx.$$

Nun ist es zu vermuten, daß die Fréchetsche Ableitung so definiert wird:

$$\partial J(u)w = 2 \int_{-1}^{+1} \{w(x)[u(x) - v(x)] + \mu w'(x)u'(x)\} dx.$$

Diese Abbildung ist linear, da die folgende Gleichung gilt:

$$\partial J(u)(a_1 w_1 + a_2 w_2) =$$

$$2 \int_{-1}^{+1} \{[a_1 w_1(x) + a_2 w_2(x)][u(x) - v(x)] + \mu[a_1 w_1'(x) + a_2 w_2'(x)]u'(x)\} dx$$

$$= 2a_1 \int_{-1}^{+1} \{w_1(x)[u(x) - v(x)] + \mu w_1'(x)u'(x)\} dx$$

$$+ 2a_2 \int_{-1}^{+1} \{w_2(x)[u(x) - v(x)] + \mu w_2'(x)u'(x)\} dx$$

$$= a_1 \partial J(u) w_1 + a_2 \partial J(u) w_2.$$

Mit der Definition der Fréchetschen Ableitung findet man:

$$\lim_{\|w\|\to 0} \frac{|J(u+w) - J(u) - \partial J(u)w|}{\|w\|} =$$

$$\lim_{\|w\|\to 0} \frac{1}{\|w\|} \left\{ \int_{-1}^{+1} \Big[[u(x) + w(x) - v(x)]^2 - [u(x) - v(x)]^2 - 2w(x)[u(x) - v(x)] \Big]\, dx \right.$$

$$\left. + \, \mu \int_{-1}^{+1} \Big[[u'(x) + w'(x)]^2 - [u'(x)]^2 - 2w'(x)u'(x) \Big]\, dx \right\}$$

$$= \lim_{\|w\|\to 0} \frac{1}{\|w\|} \int_{-1}^{+1} \Big[[w(x)]^2 + \mu [w'(x)]^2 \Big]\, dx \le \max\{1, \mu\} \lim_{\|w\|\to 0} \|w\| = 0$$

wobei die H^1-Norm natürlich wie folgt definiert wird:

$$\|u\|^2 = \|u\|_{H^1}^2 = \int_{-1}^{+1} \Big[[u(x)]^2 + [u'(x)]^2 \Big]\, dx.$$

Nun mit $n = 3$ ist der Gitter $\{x_i\} = \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$ mit $h = 2/n = 2/3$, und daher gelten $\boldsymbol{u} \approx \{u(-\frac{2}{3}), u(0), u(\frac{2}{3})\}$, $\boldsymbol{v} \approx \{v(-\frac{2}{3}), v(0), v(\frac{2}{3})\}$ und:

$$\begin{aligned} J_h(\boldsymbol{u}) &= h \Big[(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \Big] \\ &+ \frac{\mu}{h} \Big[(u_2 - u_1)^2 + (u_3 - u_2)^2 \Big]. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von J_h sind:

$$\begin{aligned} \partial_{u_1} J_h &= 2h(u_1 - v_1) - 2\mu h^{-1}(u_2 - u_1) \\ \partial_{u_2} J_h &= 2h(u_2 - v_2) + 2\mu h^{-1}[(u_2 - u_1) - (u_3 - u_2)] \\ \partial_{u_3} J_h &= 2h(u_3 - v_2) + 2\mu h^{-1}(u_3 - u_2) \end{aligned}$$

and daher ist der Gradient von $J_h(\boldsymbol{u})$ wie folgt:

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} J_h = \begin{bmatrix} 2\mu h^{-1} + 2h & -2\mu h^{-1} & 0 \\ -2\mu h^{-1} & 4\mu h^{-1} + 2h & -2\mu h^{-1} \\ 0 & -2\mu h^{-1} & 2\mu h^{-1} + 2h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - 2h \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Im allgemeinen wird der kritische Punkt durch die Gleichung $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ charakterisiert, wobei:

$$A = I + \frac{\mu}{h^2} D, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

so definiert wird.