Beispiel 10. Zeige, daß $u(x,t) = \operatorname{erf}(x/\sqrt{4t})$ mit dem sogenannten Fehlerintegral (error function)

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\xi^2}\, d\xi$$

die Lösung des folgenden Problems ist:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad t > 0; \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Was ist die Beziehung zwischen $\operatorname{erf}(\infty)$ und der Γ-Funktion? Zeige auch, daß

$$v(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 t}$$

die Lösung des folgenden Problems ist:

$$v_t = v_{xx}, \quad x \in (-\pi, +\pi), \quad v(\pm\pi, t) = 0, \quad t > 0; \qquad v(x,0) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\pi) \\ 0, & x = 0, \pm\pi \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}.$$

Was ist die Fourierreihe von $v(x,0)$?

Lösung. Zuerst beachte die Leibnizsche Regel,

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x,t)dt + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x)$$

die für die partiellen Ableitungen von u verwendet wird, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-\xi^2} \right)}_{=0} d\xi + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{\sqrt{4t}} \right) - e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(0 \right)}_{=0}.$$

Für $t > 0$ gilt $u_t = u_{xx}$, weil:

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2} \frac{x}{2} \left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{x}{2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
u_x &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{4t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
u_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\left(\frac{x^2}{4t}\right)} \left(-\frac{2x}{4t} \right) = -\frac{x}{2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

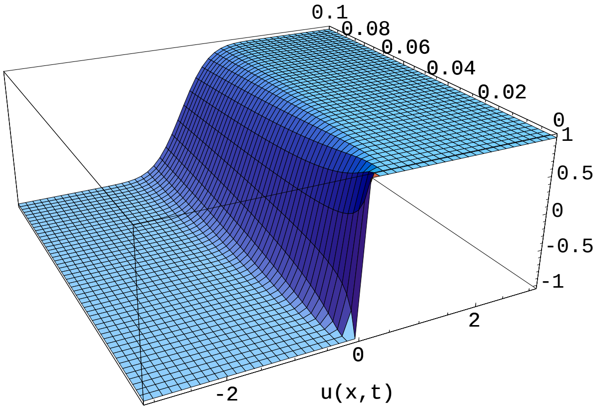
Die Anfangsbedingungen werden erfüllt, weil:

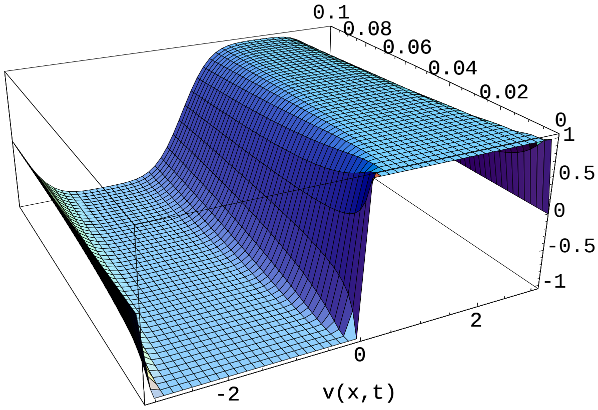
$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} u(x,t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \to 0} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-\xi^2} d\xi \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-\xi^2} d\xi & , \ x < 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rl} \operatorname{erf}(+\infty), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \operatorname{erf}(-\infty), & x < 0 \end{array} \right\} = \operatorname{Signum}(x).
\end{aligned}$$

Das heißt, $\mathrm{erf}(\pm\infty) = \pm 1$. Man kann diese Werte auch mit der Gamma-Funktion wie folgt berechnen:

$$-\int_0^{-\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \ldots \substack{\eta^{\frac{1}{2}} = \xi \\ \frac{1}{2}\eta^{\frac{1}{2}-1} d\eta = d\xi} \ldots \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \eta^{\frac{1}{2}-1} e^{-\eta} d\eta = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Hier sind die Flächendarstellungen von u beziehungsweise v:





Um v zu analysieren, definiere nun:

$$\begin{aligned}
v_N(x,t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 t}, & v(x,t) &= \lim_{N\to\infty} v_N(x,t) \\
f_N(x,t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \cos[(2n+1)x] e^{-(2n+1)^2 t}, & f(x,t) &= \lim_{N\to\infty} f_N(x,t) \\
g_N(x,t) &= -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \sin[(2n+1)x](2n+1) e^{-(2n+1)^2 t}, & g(x,t) &= \lim_{N\to\infty} g_N(x,t)
\end{aligned}$$

und beachte, daß die folgenden Gleichungen auf Grund der Endlichkeit der Summen gelten:

$$\frac{\partial v_N}{\partial x}(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \cos[(2n+1)x] e^{-(2n+1)^2 t} = f_N(x,t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \sin[(2n+1)x](2n+1) e^{-(2n+1)^2 t} = \frac{\partial f_N}{\partial x}(x,t) = g_N(x,t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial t}(x,t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N} \sin[(2n+1)x](2n+1) e^{-(2n+1)^2 t} = g_N(x,t) = \frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2}(x,t). \tag{3}$$

Nun betrachte die Behauptungen:

$$v_N \to v \text{ punktweise in } [-\pi, +\pi] \times (0, \infty), \tag{4}$$

$$f_N \to f \text{ lokal gleichmäßig in } [-\pi, +\pi] \times (0, \infty), \tag{5}$$

und:

$$g_N \to g \text{ lokal gleichmäßig in } [-\pi, +\pi] \times (0, \infty). \tag{6}$$

Nach dem Satz 2.8 oder Korollar 2.9 auf Seiten 392–393 in Analysis I, Amann und Escher, gelten:

$$(1),\ (4)\ \text{und}\ (5) \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$(2),\ (5)\ \text{und}\ (6) \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(3),\ (4)\ \text{und}\ (6) \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\partial v}{\partial t}$$

woraus die gewünschte Gleichung folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ in } (-\pi, +\pi) \times (0, \infty).$$

Nun werden (4), (5) und (6) bewiesen. Für alle Behauptungen wird es günstig zu beweisen sein, daß ein genügend großes N_0 existiert, so daß:

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} (2n+1) e^{-(2n+1)^2 t} \leq \frac{e^{-(M+1)t}}{1 - e^{-t}}, \qquad M \geq N_0. \tag{7}$$

Da der folgende Limes null ist,

$$\lim_{y\to\infty} y e^{-t(y^2-y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{t(y^2-y)}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{\frac{d}{dy} y}{\frac{d}{dy} e^{t(y^2-y)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{t(2y-1)e^{t(y^2-y)}} = 0$$

gibt es ein N_0, so daß

$$n \geq N_0 \quad \Rightarrow \quad (2n+1) e^{-t[(2n+1)^2 - (2n+1)]} \leq 1 \quad \text{oder} \quad (2n+1) e^{-(2n+1)^2 t} \leq e^{-(2n+1)t}.$$

Daher gilt die folgende Ungleichung für $M \geq N_0$

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} (2n+1) e^{-(2n+1)^2 t} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} e^{-(2n+1)t} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(e^{-t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-t}\right)^n - \sum_{n=0}^{M} \left(e^{-t}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1 - (e^{-t})^{M+1}}{1 - e^{-t}} = \frac{e^{-t(M+1)}}{1 - e^{-t}}$$

und daraus folgt (7).

Nach der Bemerkung 1.1(b) auf Seite 381 in Analysis I, Amann und Escher, folgt (4) wenn $\{v_N(x,t)\}$ eine Cauchyfolge für jedes $(x,t) \in [-\pi, +\pi] \times (0, \infty)$ ist. Beachte, daß für $N > M \geq N_0$:

$$\begin{aligned} |v_N(x,t) - v_M(x,t)| &= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{n=M+1}^{N} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 t} \right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=M+1}^{N} \frac{e^{-(2n+1)^2 t}}{(2n+1)} \\ &\leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=M+1}^{\infty} (2n+1) e^{-(2n+1)^2 t} \leq \frac{4}{\pi} \frac{e^{-t(M+1)}}{1 - e^{-t}} \xrightarrow{M\to\infty} 0 \end{aligned}$$

und daraus folgt (4) sowie die Randbedingungen:

$$v(\pm\pi, t) = \lim_{N\to\infty} v_N(\pm\pi, t) = 0, \quad t > 0.$$

Nach der Diskussion auf Seite 88 in Analysis II, Amann und Escher, gilt auch $v_N(x,0) \to v(x,0)$ punktweise, d.h. an $t = 0$. Nach dem Satz 2.4 auf Seite 390 in Analysis I, Amann und Escher, kann die Konvergenz $v_N(x,0) \to v(x,0)$, d.h. an $t=0$, nicht gleichmäßig sein, weil lokal gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen stetig sind, und $v(x,0)$ nicht stetig ist.

Nach dem Satz 1.4 auf Seite 384 und der Diskussion auf Seite 389 in Analysis I, Amann und Escher, folgt (5) wenn $\{f_N(x,t)\}$ das Cauchysche Kriterium in Bezug auf jede beschränkte Umgebung $[x_1,x_2]\times[t_1,t_2]\subset[-\pi,+\pi]\times(0,\infty)$ erfüllt. Beachte, daß für $N>M\geq N_0$:

$$\begin{aligned}
|f_N(x,t)-f_M(x,t)| &= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{n=M+1}^{N}\cos[(2n+1)x]e^{-(2n+1)^2t}\right| \leq \frac{4}{\pi}\sum_{n=M+1}^{N} e^{-(2n+1)^2t} \\
&\leq \frac{4}{\pi}\sum_{n=M+1}^{\infty}(2n+1)e^{-(2n+1)^2t} \leq \frac{4}{\pi}\frac{e^{-t(M+1)}}{1-e^{-t}} \leq \frac{4}{\pi}\frac{e^{-t_1(M+1)}}{1-e^{-t_1}} \stackrel{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
& \qquad \forall (x,t) \text{ mit } 0<t_1\leq t\leq t_2<\infty
\end{aligned}$$

weil:

$$t>t_1 \Rightarrow e^{-t(M+1)} \leq e^{-t_1(M+1)}$$

$$t>t_1 \Rightarrow e^{-t}\leq e^{-t_1} \Rightarrow 1-e^{-t}\geq 1-e^{-t_1} \Rightarrow \frac{1}{1-e^{-t}} \leq \frac{1}{1-e^{-t_1}} \Rightarrow \frac{e^{-t(M+1)}}{1-e^{-t}} \leq \frac{e^{-t_1(M+1)}}{1-e^{-t_1}}$$

und daraus folgt (5).

Nach dem Satz 1.4 auf Seite 384 und der Diskussion auf Seite 389 in Analysis I, Amann und Escher, folgt (6) wenn $\{g_N(x,t)\}$ das Cauchysche Kriterium in Bezug auf jede beschränkte Umgebung $[x_1,x_2]\times[t_1,t_2]\subset[-\pi,+\pi]\times(0,\infty)$ erfüllt. Beachte, daß für $N>M\geq N_0$:

$$\begin{aligned}
|g_N(x,t)-g_M(x,t)| &= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{n=M+1}^{N}\sin[(2n+1)x](2n+1)e^{-(2n+1)^2t}\right| \\
&\leq \frac{4}{\pi}\sum_{n=M+1}^{\infty}(2n+1)e^{-(2n+1)^2t} \leq \frac{4}{\pi}\frac{e^{-t(M+1)}}{1-e^{-t}} \leq \frac{4}{\pi}\frac{e^{-t_1(M+1)}}{1-e^{-t_1}} \stackrel{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
& \qquad \forall (x,t) \text{ mit } 0<t_1\leq t\leq t_2<\infty
\end{aligned}$$

und daraus folgt (6).

Nun wird es gezeigt, daß die Summe in $v(x,0)$ die Fourierreihe der Signum-Funktion ist. Nach der Bemerkung 7.9(c) auf Seite 77 und dem Beispiel 7.10(a) auf Seite 77, in Analysis II, Amann und Escher, werden die Fourierkoeffizienten wie folgt bestimmt, weil $h(x)=\text{Signum}(x)$ $(h(\pm\pi)=0)$ ungerade ist:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} h(x)\cos(nx)dx = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} h(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} h(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}\sin(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 4/(n\pi), & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$h(x) = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{4}{n\pi}\sin(nx) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)} = v(x,0).$$

Schließlich wird es gezeigt, daß $v(x,t)$ im quadratischen Mittel gegen $v(x,0)$ konvergiert, wenn $t \to 0$. Nach der Parsevalschen Gleichung in der Bemerkung 7.17(a) auf Seite 82 in Analysis II, Amann und Escher, gilt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |v(x,0) - v(x,t)|^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16/\pi^2}{(2n+1)^2} \left(1 - e^{-(2n+1)^2 t}\right)^2 .$$

Nun definiere:

$$\phi_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(1 - e^{-(2n+1)^2 t}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \phi(t) = \lim_{N\to\infty} \phi_N(t).$$

Nach dem Satz 1.4 auf Seite 384 in Analysis I, Amann und Escher, konvergiert $\phi_N(t)$ gegen $\phi(t)$ gleichmäßig wenn $\{\phi_N(t)\}$ das Cauchysche Kriterium erfüllt. Beachte, daß für $N > M$:

$$|\phi_N(t) - \phi_M(t)| = \left| \sum_{n=M+1}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(1 - e^{-(2n+1)^2 t}\right)^2 \right| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2} \stackrel{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz $\phi_N(t) \to \phi(t)$. Deshalb nach der Bemerkung 2.5(b) auf Seite 390 in Analysis I werden die folgenden Limiten vertauschbar:

$$\lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \lim_{N\to\infty} \phi_N(t) = \lim_{N\to\infty} \lim_{t\to 0} \phi_N(t) = 0$$

und daher gilt:

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |v(x,0) - v(x,t)|^2 \, dx = 0.$$

Können Sie zeigen, daß $v(x,t)$ punktweise gegen $v(x,0)$ konvergiert, wenn $t \to 0$?