9. Leite das Volumen und die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel her.

Lösung (cf. Forster, S. 145). Sei τ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

Bemerke, daß die Kugeln:

$$K_n(r) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \|x\| \leq r\}$$

die Formel:

$$\mathrm{Vol}(K_n(r)) = r^n \mathrm{Vol}(K_n(1))$$

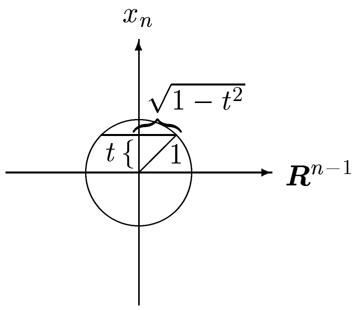
erfüllen. Diese Formel gilt, weil eine affin-lineare Abbildung $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ die Formel $\mathrm{Vol}(f(K)) = |\det(A)|\mathrm{Vol}(K)$ erfüllt, und daher $\mathrm{Vol}(K_n(r)) = |\det(rI)|\mathrm{Vol}(K_n(1))$.

Da $K_1(1) = [-1, 1]$, folgt $\tau_1 = 2$. Für $n > 1$, wird τ_n mit dem Cavalierischen Prinzip berechnet:

$$K_t = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n-1} : (\boldsymbol{x}, t) \in K\}, \qquad \mathrm{Vol}(K) = \int_{\boldsymbol{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)dt.$$

Nun gilt für die Schnittmengen:

$$K_n(1)_t = \begin{cases} K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}), & |t| < 1 \\ \emptyset, & |t| > 1 \end{cases}$$



Also:

$$\begin{aligned} \tau_n = \mathrm{Vol}(K_n(1)) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{Vol}(K_{n-1}(\sqrt{1-t^2}))dt \\ &= \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-t^2})^{n-1} \mathrm{Vol}(K_{n-1}(1))dt = \tau_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt \end{aligned}$$

Weil:

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \ldots$$

oder

$$c_n \cdot c_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$$

erfüllen die τ_n die Rekursionsformel:

Weil $\tau_2 = \pi$ und $\tau_1 = 2$ gelten, erfüllen die τ_n:

Mit der Gamma Funktion:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\
\Gamma(k+1) &= k! \\
\Gamma(k+\tfrac{3}{2}) &= (k+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \cdots = \left[\tfrac{2k+1}{2}\tfrac{2k-1}{2}\cdots\tfrac{1}{2}\right]\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\
\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

bekommt man die günstigen Formeln:

oder:

$$\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Die Oberfläche ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel $S_{n-1} = \partial K_n(1)$ wird mit dem folgenden Satz berechnet:

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_0^\infty \left[\int_{\|\boldsymbol{x}\|=r} f(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x})\right] dr = \int_0^\infty \left[\int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} f(r\boldsymbol{\xi}) dS(\boldsymbol{\xi})\right] r^{n-1} dr.$$

Mit $f(\boldsymbol{x}) = \chi_{K_n(1)}(\boldsymbol{x})$,

und weil $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$, $(m = \frac{n}{2})$:

$$\omega_n = n\tau_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$