Beispiel $\tilde{7}$. Es seien $f \in C^4([\alpha,\beta],\boldsymbol{R})$ und $\alpha_j := \alpha + jh$ für $0 \le j \le 2n$ mit $h := (\beta-\alpha)/(2n)$ und $n \in \boldsymbol{N}$. Ferner sei

$$S(f,[\alpha,\beta,h) := \frac{h}{3}\left(f(\alpha)+f(\beta)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(\alpha_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(\alpha_{2j-1})\right).$$

Zeige, daß für diese *Simpsonsche Regel* zur näherungsweisen Integration die Fehlerabschätzung

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - S(f,[\alpha,\beta],h)\right| \le (\beta-\alpha)\frac{h^4}{180}\|f^{(4)}\|_\infty$$

gilt.

Lösung – von Herrn Müller. Zuerst zerlege das Integral über $[\alpha,\beta]$ in Teilintervalle $\{[\alpha_{2j},\alpha_{2j+2}]\}$:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - S(f,[\alpha,\beta],h)\right|$$

$$= \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \frac{h}{3}\left(f(\alpha)+f(\beta)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(\alpha_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n} f(\alpha_{2j-1})\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{n-1}\int_{\alpha_{2j}}^{\alpha_{2j+2}} f(x)dx - \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{n-1}[f(\alpha_{2j})+4f(\alpha_{2j+1})+f(\alpha_{2j+2})]\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} S_k\right|$$

wobei S_k wie folgt definiert wird:

$$S_k := \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+2}} f(x)dx - \frac{h}{3}\left(f(\alpha_k)+4f(\alpha_{k+1})+f(\alpha_{k+2})\right).$$

Wegen des 7.Beispiels gilt:

$$|S_k| \le \frac{h^5}{90}\|f^{(4)}\|_{L^\infty([\alpha_k,\alpha_{k+2}])}$$

und daher:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} S_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|S_k| \le n\frac{h^5}{90}\max_{0\le k\le n-1}\|f^{(4)}\|_{L^\infty([\alpha_k,\alpha_{k+2}])}$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)}{2h}\frac{h^5}{90}\|f^{(4)}\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} = (\beta-\alpha)\frac{h^4}{180}\|f^{(4)}\|_\infty$$

worin die Definition $h := (\beta-\alpha)/(2n)$ verwendet worden ist.