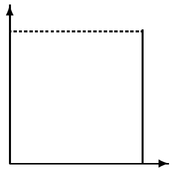
Beispiel $\tilde{5}$. Entscheide ob die Funktion,



$$f(x) = 1,\ x \in \boldsymbol{Q} \cap [0,1], \qquad f(x) = 0,\ x \in [0,1] \backslash \boldsymbol{Q},$$

sprungstetig oder Riemann integrierbar ist.

Lösung. Die Funktion $f : I \to E$ heißt Riemann integrierbar (in $\#\tilde{5}$ – Siehe S. 21, Analysis II, Amann und Escher), wenn ein $e \in E$ existiert mit folgender Eigenschaft. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\left| e - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $\mathcal{Z} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ von I mit $\Delta_{\mathcal{Z}} < \delta$ und für jede Wahl der Zwischenpunkte $\xi_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ gilt.

Zuerst wähle $\xi_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \cap \boldsymbol{Q}$ für irgendeine Zerlegung $\mathcal{Z} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot (\alpha_j - \alpha_{j-1}) = e_1 = 1, \qquad \forall \mathcal{Z}.$$

Nun wähle $\xi_j \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \backslash \boldsymbol{Q}$ für irgendeine Zerlegung $\mathcal{Z} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot (\alpha_j - \alpha_{j-1}) = e_2 = 0, \qquad \forall \mathcal{Z}.$$

Da $e_1 \neq e_2$ ist f nicht Riemann integrierbar. Da jede sprungstetige Funktion Riemann integrierbar ist (Siehe S. 21, Analysis II, Amann und Escher), ist f nicht sprungstetig. Trotzdem betrachte die Frage ohne diesen Satz. (Siehe S. 4, Analysis II, Amann und Escher.) Die Funktion $f : I \to E$ ist sprungstetig wenn die Grenzwerte $f(\alpha + 0)$, $f(\beta + 0)$, und $f(x \pm 0)$ für $x \in I$ existieren. Nun, definiere:

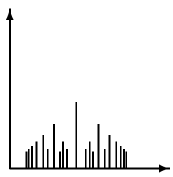
$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{n}$$

und beachte:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad \text{aber} \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Also existiert $f(\frac{1}{2} + 0)$ nicht, und f ist nicht sprungstetig.

Beispiel 5. Entscheide ob die Funktion,



$$f(x) = 1/n,\ x \in \boldsymbol{Q} \cap [0,1] \text{ mit teilerfremder Darstellung } x = m/n,$$
$$f(x) = 0,\ x \in [0,1] \backslash \boldsymbol{Q},$$

sprungstetig oder Riemann integrierbar ist.

Lösung – von Frau Pak. Eine Funktion $f : I \to E$ ist Riemann integrierbar wenn:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$$

wobei δ die Feinheit der Zerlegung $(x_0, \ldots, x_n)$ ist (d.h. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \leq \delta$), und ω_i die Schwankung der Funktion im i-ten Teilintervall (d.h. $\omega_i = M_i - m_i$).

Wähle $N \in \boldsymbol{N}$. Die Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ bilden 2 Klassen:

1. Die Teilintervalle, in denen die Zahlen $Q_N = \{m/n : n \leq N\}$ liegen.

2. Die Teilintervalle, die Zahlen von Q_N nicht enthalten.

Die Riemannsche Summe wird in die 2 Klassen zerlegt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{\text{1.Klasse}} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\text{2.Klasse}} \omega_i \Delta x_i.$$

Zum Beispiel, nimm $N = 4$. Die Teilintervalle in der ersten Klasse sind die, die die 7 Zahlen,

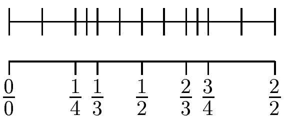
$$Q_4 = \{\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$$

enthalten. Definiere die Zahl k_N der Zahlen in Q_N, und beachte:

$$k_N \leq \sum_{n=1}^{N} (n+1) = \frac{N(N+1)}{2} + N.$$

Also ist k_N endlich und $k_4 = 7$. Beachte,

Zerlegung:



daß jede Zahl $m/n \in Q_N$ in höchstens 2 Teilintervallen liegt. Daher ist die Zahl der Teilintervalle in der ersten Klasse höchstens $2k_N$. Da $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ gilt, gilt $\omega_i \leq \frac{1}{2}$ in der ersten Klasse, und

$$\sum_{\text{1.Klasse}} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{\text{1.Klasse}} \frac{1}{2} \Delta x_i \leq \frac{1}{2} \sum_{\text{1.Klasse}} \delta \leq \frac{1}{2} \delta(2k_N) = \delta k_N.$$

In der zweiten Klasse gilt $\omega_i \leq f(m/n)|_{n>N} - f([0,1]\backslash \boldsymbol{Q}) = 1/n \leq 1/N$, und

$$\sum_{\text{2.Klasse}} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{\text{2.Klasse}} \frac{1}{N} \Delta x_i \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{1}{N}.$$

Nun setze $N > 2/\varepsilon$ und $\delta = \varepsilon/(2k_N)$, so daß

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{\text{1.Klasse}} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\text{2.Klasse}} \omega_i \Delta x_i \leq \delta k_N + \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Deshalb ist das Limes null, und f ist Riemann integrierbar. Die Funktion f ist auch sprungstetig, weil $\forall x_0 \in [0,1]$ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $N = [\![1/\varepsilon]\!]$. Dann gilt:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n \geq \varepsilon, & x = m/n \in Q_N \\ < \varepsilon, & x \in [0,1]\backslash Q_N. \end{cases}$$

Da die Zahl k_N der Zahlen in Q_N endlich ist, gibt es ein δ so daß $(x_0 - \delta, x_0) \cap Q_N = \emptyset = (x_0, x_0 + \delta) \cap Q_N$ gelten. Daher gilt:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

Deshalb ist das Limes null. Also existieren $f(x_0 + 0)$ und $f(x_0 - 0)$.

Bemerkungen: Wenn x_0 irrational ist, gilt $f(x_0) = 0$, und daher ist f stetig in jedem irrationalen Punkt. Wenn x_0 rational ist, gilt $f(x_0) \neq 0$, und daher ist f unstetig in jedem rationalen Punkt. Das Resultat ist mit dem Satz konsistent, daß jede sprungstetige Funktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.