Zentrum für
Technomathematik

Numerik I

WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

Übungsblatt Nr. 12

Abgabe Mittwoch, 03.02.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Butcher-Schemata] 4 Punkte

a) Geben Sie alle zweistufigen Runge-Kutta-Verfahren der Form

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

mit Ordnung 2 an. Welches Verfahren ergibt sich für $b_1 = 0$?

b) Geben Sie die Ordnung der folgenden vierstufigen RK-Verfahren an:

$$1)\quad \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \qquad\qquad 2)\quad \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\ 1 & 0 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Aufgabe 2: [Exakte Integration] 4 Punkte

a) Zeigen Sie, dass die beiden Anfangswertaufgaben

$$y'(x) = 2(x+1),\ y(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad y'(x) = \frac{2y}{x+1},\ y(0) = 1 \tag{1}$$

die gleiche Lösung besitzen.

b) Untersuchen Sie, ob das Verfahren von Heun $\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$ die beiden Anfangswertaufgaben (1) exakt integriert, d.h. ob die numerische Approximation mit der exakten Lösung an den Stützstellen übereinstimmt. Äußern Sie eine Vermutung und beweisen Sie diese!

Aufgabe 3: [Extrapolation] 4 Punkte

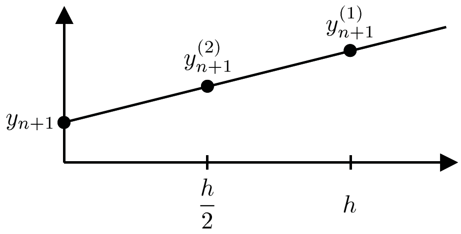
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = y_0.$$

und explizite Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0 \ldots, N-1$$

mit $x_n = a + nh$, $n = 0 \ldots, N$, $h = \frac{b-a}{N}$.
Bei den Quadraturformeln konnten wir durch geeginete (Richardson-)Extrapolation die Ordnung der Quadratur erhöhen. Analog wollen wir untersuchen, ob das Euler-Verfahren durch Extrapolation verbessert werden kann. Berechnen Sie dazu aus y_n jeweils ein $y_{n+1}^{(1)}$ durch einen Euler-Schritt zur Schrittweite h und ein $y_{n+1}^{(2)}$ durch zwei Euler-Schritte zur Schrittweite $h/2$. Schließlich erhält man y_{n+1} als Extrapolation von $(h, y_{n+1}^{(1)})$ und $(h/2, y_{n+1}^{(2)})$ auf $h = 0$:



Welches Verfahren ergibt sich auf diese Weise?