Zentrum für Technomathematik

Numerik I

WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

Übungsblatt Nr. 11

Abgabe Mittwoch, 27.01.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Differentialgleichungen] 4 Punkte

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Anfangswertprobleme eine eindeutige Lösung für $x \in [0, 1]$ besitzen

1) $y'(x) = ax, \quad y(0) = 1, \quad a \in \mathbb{R},$
2) $y'(x) = \dfrac{1}{x+1}, \quad y(0) = 1,$
3) $y'(x) = ay(x) + bx, \quad y(0) = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$

b) Überführen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) = \rho(1 - y(x)^2)y'(x) - y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad \rho > 0$$

zur so genannten van der Polschen Differentialgleichung in ein Anfangswertproblem für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass das Anfangswertproblem $y'(x) = 2\sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 4$ eine eindeutige Lösung für $x \in [0, 1]$ besitzt. Widerspricht das dem Satz von Picard-Lindelöf? (Tipp: Suche y in Raum der Polynome.)

Aufgabe 2: [Euler-Verfahren] 4 Punkte

a) Das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 2\sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 0$$

hat die Lösung $y(x) = x^2$. Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren Näherungen y_n zur Schrittweite $h > 0$ an den Gitterpunkten $x_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots$, und diskutieren Sie, warum die Näherungen für $h \to 0$ nicht gegen y konvergieren.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -\lambda y(x), \quad y(0) = 1, \quad \lambda > 0.$$

Die exakte Lösung dieses Anfangswertsproblems ist monoton fallend und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. Wie muss man bei der Anwendung des expliziten und des impliziten Euler-Verfahrens die Schrittweite h wählen, damit sich die Näherungslösungen y_n qualitativ genauso verhalten (d.h. y_n sind monoton und $\lim_{k\to\infty} y_n = 0$)?

Aufgabe 3: [Zeitintegration] 4 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y'(x) = f(y(x), x), y(x_0) = y_0$. Dann ist die Lösung dieses Problems gegeben durch

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} y'(x)\, dx + y_0.$$

Kennen wir also den Wert von y in x_k so gilt für den Wert an der Stelle $x_{k+1} := x_k + h$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(y(x), x)\, dx.$$

Welches Verfahren ergibt sich, wenn das letzte Integral

a) durch die linke Rechteckquadraturformel ersetzt wird und formal alle ggf. vorkommenden $y(x_{k+1})$ durch y_{k+1} und $y(x_k)$ durch y_k ersetzt werden;

b) durch die rechte Rechteckquadraturformel ersetzt wird und formal alle ggf. vorkommenden $y(x_{k+1})$ durch y_{k+1} und $y(x_k)$ durch y_k ersetzt werden;

c) durch die Trapezquadraturformel ersetzt wird und diesmal alle ggf. vorkommenden $y(x_k)$ durch y_k und alle rechts vorkommenden $y(x_{k+1})$ durch die Taylorentwicklung von y um x_k bis zum linearen Term ersetzt werden.

Aufgabe 4, Programmierung: [Satellitenproblem, Abgabe bis 03 Februar 2010 vor der Vorlesung] 8 Punkte

Zwei Körper (z.B. Erde und Mond) bewegen sich auf einer Kreisbahn um den gemeinsamen Schwerpunkt herum. Es soll die Bahnkurve eines dritten Körpers mit vernachlässigbarer Masse (z.B. ein Satellit) berechnet werden. Das Dreikörpersystem kann in einem rotierenden Koordinatensystem beschrieben werden, bei dem Erde und Mond die Massen $1-\mu$ bzw. μ und *feste* Positionen $(-\mu, 0)$ bzw. $(1-\mu, 0)$ haben. Dabei ergibt sich für die Position des Satelliten $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + 2y_2' - \mu' \frac{y_1 + \mu}{D_1} - \mu \frac{y_1 - \mu'}{D_2} \\ y_2'' &= y_2 - 2y_1' - \mu' \frac{y_2}{D_1} - \mu \frac{y_2}{D_2} \end{aligned} \tag{1}$$

mit

$$D_1 = ((y_1 + \mu)^2 + y_2^2)^{3/2}, \quad D_2 = ((y_1 - \mu')^2 + y_2^2)^{3/2}, \quad \mu = 0.012\,277\,471, \quad \mu' = 1 - \mu.$$

Eine Längeneinheit entspricht der Distanz zwischen Erde und Mond, also 384 401 km. Eine Zeiteinheit entspricht der Umlaufzeit des Mondes um die Erde, also etwa einen Monat. Der Parameter μ ist das sogenannte reduzierte Massenverhältnis. Wir wollen den Orbit $y(t)$ des Satelliten berechnen.

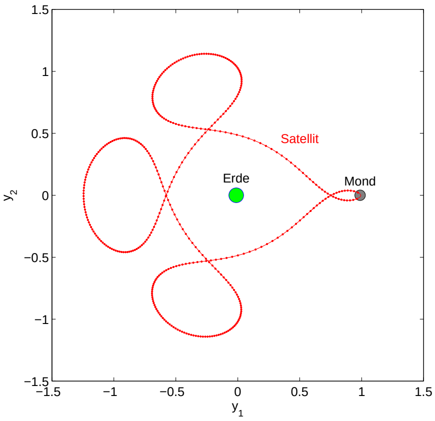
Die Anfangsbedingungen seien

$$\begin{aligned}(y_1(0), y_2(0)) &= (0.994, 0),\\ (y_1'(0), y_2'(0)) &= (0, -2.001\,585\,106\,379\,082\,522).\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass der Orbit des Satelliten periodisch ist mit Periode

$$T = 17.065\,216\,560\,157\,962\,559,$$

d.h. $y(0) = y(T)$ und $y'(0) = y'(T)$.



a) Schreiben Sie die Gleichungen (1) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung $\tilde{y}' = f(t, \tilde{y})$ um.

b) Schreiben Sie ein Programm, das *eine* Periode des Satellitenorbits im System Erde-Mond-Satellit berechnet. Wählen Sie (durch Ausprobieren) die Schrittweiten so, dass die Position des Satelliten zum Zeitpunkt $t = T$ mit einer Genauigkeit von etwa 1 km mit der Startposition übereinstimmt. Wie groß ist die gewählte Schrittweite? (Hinweis: Stellen Sie sicher, dass Sie im letzten Schritt nicht über $t = T$ hinausschießen.)

c) Plotten Sie den Orbit im rotierenden und in einem nicht rotierenden Koordinatensystem.

d) Wie lange etwa dauert die Berechnung?

e) Wie groß ist die tatsächlich erreichte Genauigkeit?

f) Wie oft musste die Steigungsfunktion f ausgewertet werden?

g) Ein Punkt heißt *stationär*, wenn unter der Nebenbedinung $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ die Position des Satelliten sich nicht mit der Zeit ändert. Gib die Anzahl der stationären Punkte an und ihre ungefähre Position.

h) Ein stationärer Punkt heißt *stabil*, wenn kleine Änderungen der Startposition des Satelliten weg von einem stationären Punkt nur kleine Auswirkungen auf seine Bahn haben. Insbesondere: Jeder Satellit der mit $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ in der Nähe eines stabilen stationären Punktes gestartet wurde bleibt auch für immer in der Nähe dieses Punktes. Welche der stationären Punkte sind stabil?