Zentrum für Technomathematik

Numerik I
WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

Übungsblatt Nr. 10

Abgabe Mittwoch, 20.01.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Eindeutigkeit der Integrationsgewichte] 4 Punkte

Zeige oder widerlege: Für jede fest gewählte Unterteilung $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ gibt es eindeutig bestimmte Gewichte $\omega_0, \ldots, \omega_n$, so dass

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^n \omega_i p(x_i)$$

für alle Polynome vom Grad höchstens n gilt.

Aufgabe 2: [Ordnung] 4 Punkte

Wir betrachten die folgende Unterteilung von $[-1, 1]$

$$-\tfrac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\tfrac{10}{7}}} < -\tfrac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\tfrac{10}{7}}} < 0 < \tfrac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\tfrac{10}{7}}} < \tfrac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\tfrac{10}{7}}}.$$

Beachte, dass in dieser Unterteilung die Endpunkte -1 und 1 nicht vorkommen.

a) Gib zu der obigen Unterteilung die zugehörigen Gewichte ω_i an. (bzgl. $\int_{-1}^1 dx$)

b) Gib die Ordnung der zugehörigen Quadraturformel $\sum \omega_i f(x_i)$ an.

Aufgabe 3: [Kessel Buntes] 4 Punkte

a) Zeige: Es ist unmöglich eine Unterteilung $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ und Gewichte $\omega_0, \ldots, \omega_n$ so zu wählen, dass

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^n \omega_i p(x_i)$$

für alle Polynome vom Grad höchstens $2n + 2$ gilt.

b) Sei Q_h eine Quadraturformel der Ordnung p zu äquidistant verteilten Stützstellen mit Abstand h. Wie müssen α und β gewählt werden, so dass

$$\alpha Q_h + \beta Q_{h/7}$$

eine höhere Ordnung als Q_h hat?

(*) Aufgabe 4, Programmierung: [Ein spezielles Integral] $n \cdot \frac{1}{2}$ Punkte

Erstelle ein Programm, das mithilfe der numerischen Quadratur das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin(\tfrac{1}{x})\, dx$$

auswertet.