Zentrum für Technomathematik

Numerik I

WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

Übungsblatt Nr. 9

Abgabe Mittwoch, 13.01.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Simpson-Regel] 4 Punkte

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ ein Gitter und $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_m$ die zugehörigen Lagrange-polynome. Die Quadraturformel Q der Form

$$Q[f] = \sum_i w_i \cdot f(x_i) \qquad w_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$$

heisst Newton-Cotes-Formel. Für welches m und welches Gitter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ ist die Simpson-Quadaraturformel

$$S[f] = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b))$$

eine Newton-Cotes-Formel? Beweise deine Behauptung.

Aufgabe 2, Programmierung: [Parametersuche] 4 Punkte

a) Berechne mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Lösung des quadratischen Gleichungssystems $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^t = 0$ mit

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 x_2 \\ f_2(x_1, x_2) &= x_2^2 x_1 + x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Verwenden Sie die Startnäherung $x^{(0)} = (0.6, 0.25)^t$ und breche die Iteration ab, wenn $\|f(x^{(n)})\|_\infty < 10^{-9}$. Gib in jedem Schritt die Werte $x^{(n)}$ und $f(x^{(n)})$ aus. Konvergiert das Verfahren mit der Ordnung, die du erwartet hast? Wenn nein, woran liegt das?

b) In vielen praktischen Anwendungen möchte man die Aufgabe $Ax = y$ lösen. Ist nur eine gestörte Version y^δ der Daten y verfügbar, wobei $\|y^\delta - y\|_2 \leq \delta$, und weiss man dass die Matrix A sehr schlecht konditioniert oder sogar nicht regulär ist, dann hat es keinen Sinn die exakte Lösung x durch $A^{-1}y^\delta$ anzunähern. Statt dessen verwendet man in so einem Fall die sogenannte *Tikhonov-Regularisierung* von A^{-1}. Dabei wird die Matrix A^{-1} durch $T_\alpha = (A^*A + \alpha \cdot I)^{-1}A^*$ ersetzt; I ist hier eine Einheitsmatrix. Dann bleibt noch die Frage wie der Paramter α gewählt werden soll, damit $T_\alpha y^\delta$ eine sinnvolle Näherung an x darstellt. Da man bereits weiss, dass $\|y^\delta - Ax\|_2^2 \approx \delta^2$ gilt und und weiter möchte, dass $T_\alpha y^\delta \approx x$ ist, wählt man α so, dass

$$\|y^\delta - AT_\alpha y^\delta\|_2^2 = \delta^2.$$

Wir definieren also f als

$$f(\alpha) = \|y^\delta - AT_\alpha y^\delta\|^2 - \delta^2.$$

Programmier eine Routine, die eine Nullstelle von $f(\alpha)$ findet. Der Aufruf der Routine muss unbedingt die Form `alpha = morozov(A,yDelta,delta)` haben. Begründe die Konvergenz deiner Routine und teste sie an der Matrix $A = \texttt{tril}(\texttt{ones}(1000))/1000$ und $y^\delta = A \cdot \mathrm{ones}(1000, 1) + 10^{-2} \cdot \mathrm{randn}(1000, 1)$.