Zentrum für Technomathematik

Numerik I
WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

---

# Übungsblatt Nr. 8

Abgabe Mittwoch, 06.01.2009 vor der Vorlesung

**Aufgabe 1: [Newton in 1D]** 4 Punkte

Die Funktion $Z$ an der Stelle $x$ sei definiert als die größte Lösung der Gleichung

$$-y \cdot \ln y = x.$$

a) Zeige oder widerlege: Die Newton-Iteration zur Lösung der Gleichung $-y \cdot \ln(y) - x = 0$ ist gegeben durch

$$y_{n+1} = \frac{y_n - x}{1 + \ln y_n}.$$

b) Zeige: Das besondere an der Funktion $Z$ ist, dass die Newton-Iteration zur Lösung von $Z(x) = 0$ durch

$$x_{n+1} = Z(x_n)$$

gegeben ist.

**Aufgabe 2: [Newton-Verfahren in 2D]** 4 Punkte

Es seien die Stützstellen $(x_i)$ und die Daten $(y_i)$ gegeben. Die Koeffizienten $A, B$ der Ausgleichsgerade $Ax + B$ sind die Zahlen für die die Funktion

$$f(a,b) = \sum_i |a \cdot x_i + b - y_i|^2.$$

minimal wird. Damit muss nach den Regeln der Differentialrechnung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a}(A,B) \\ \frac{\partial f}{\partial b}(A,B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten. Damit kann man hoffen die Koeffizienten $A, B$ mit Hilfe des (zweidimensionalen) Newton-Verfahrens für die Funktion $g = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$ zu finden.

a) Bestimme $\frac{\partial f}{\partial a}$ und $\frac{\partial f}{\partial b}$.

b) Zeige, dass das Newton-Verfahren für $g$ durch

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a_n,b_n) & \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(a_n,b_n) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a_n,b_n) & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a_n,b_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a}(a_n,b_n) \\ \frac{\partial f}{\partial b}(a_n,b_n) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

c) Konvergiert das Verfahren für jede Wahl von Startwerten $a_1$ und $b_1$ gegen die gewünschte Lösung $A, B$?

d) Wie lange braucht das Verfahren schlimmstenfalls um zu konvergieren?

**Aufgabe 3: [Lineare Konvergenz]** 4 Punkte

Die Folge $(x_n)$ konviergiert mit *linearer Ordnung* gegen $x^*$, falls ein $c$ mit $0 < c < 1$ existiert, so dass

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq c \cdot \|x_n - x^*\|$$

a) Zeige oder widerlege: Konvergiert $(x_n)$ mit linearer Ordnung gegen $x^*$, so gilt für ein genügend grosses $A$

$$\|x_n - x^*\| \leq A \cdot \exp(-n/A).$$

b) Zeige oder widerlege: Existiert ein $0 < A < \infty$, so dass

$$\|x_n - x^*\| \leq A \cdot \exp(-n/A),$$

dann konvergiert $(x_n)$ mit linearer Ordnung gegen $x^*$.