Zentrum für Technomathematik

Numerik I
WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

---

# Übungsblatt Nr. 7

Abgabe Mittwoch, 16.12.2009 vor der Vorlesung

**Aufgabe 1: [HOUSEHOLDER-Spiegelungen]** 4 Punkte

Sei $v$ ein beliebiger Vektor, dann heisst die zugehörige Matrix

$$P = I - \frac{2}{v^*v} vv^*$$

die *Householder-Spiegelung* zu $v$. Zeige:

a) $P$ ist hermitesch, d.h. $P = P^*$

b) $P$ ist unitär, d.h. $P^*P = I$

c) $Pv = -v$

d) Für alle $w$ die orthogonal zu $v$ sind, gilt $Pw = w$. Dabei heisst $w$ orthogonal zu $v$, falls $v^*w = 0$.

e) Warum nennt man $P$ eine Spiegelung?

**Aufgabe 2: [QR-Zerlegung]** 4 Punkte

Vereinbaren wir, dass die Householder-Spiegelung *zu einer Matrix* $A$ folgendermaßen konstruiert wird: Sei $a$ die erste Spalte von $A$ und $e$ der Einheitsvektor, der nur im ersten Eintrag eine Eins hat und von gleicher Länge ist wie $a$. Falls $a_1 \neq 0$, setze $v = a/\|a\|_2 + a_1/|a_1| \cdot e$, sonst $v = a/\|a\|_2 + e$. Die Householder-Spiegelung zu $A$ sei dann die Householder-Spiegelung von $v$. Dann kann eine QR-Zerlegung wie folgt konstruiert werden:

a) Berechne die Householder-Spiegelung $P_1$ zu $A$.

b) Zeige: Dann hat $P_1A$ die Form $\begin{pmatrix} r_{11} & \dots \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

c) Berechne die Householder-Spiegelung $P_2'$ von $A_2$ und ergänze diese zu einer Matrix $P_2$ durch $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2' \end{pmatrix}$, so dass $P_1$ und $P_2$ die gleiche Größe haben. $I$ ist hier die Einheitsmatrix passender Dimension. Dann hat $P_2P_1A$ die Form

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & \dots \\ & r_{22} & \dots \\ & & A_3 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat also die neue Matrix exakt die gleiche erste Zeile wie die Matrix $P_1A$.

d) Berechne die Householder-Spiegelung $P_3'$ zu $A_3$ und ergänze diese zu $P_3$ wie oben. Berechne $P_3P_2P_1A$ und bestimme so $A_4$ etc.

e) Zeige: Falls der Rang von $A$ gleich der Anzahl der Spalten ist, so hat keine der enstehenden Matrizen $A_k$ als erste Spalte die Nullspalte. Das heisst, in diesem Fall ist der Algorithmus wohldefiniert.

f) Zeige: Der oben beschriebene Algorithmus erzeugt eine QR-Zerlegung von $A$.

g) Zeige weiter: sind die Householder-Spiegelungen $P_k$ gegeben, so kann $Q$ berechnet werden, ohne dass eine Matrix-Invertierung berechnet werden muss.

**Aufgabe 3: [Ausgleichsgerade]** $4+\frac{1}{2}$ Punkte

Wie bekannt: Für einen temperaturabhängigen Widerstand sei folgende Kennkurve gegeben

| Temperatur | −50°C | −20°C | 0°C | 20°C | 50°C | 90°C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstand | 1030 Ω | 1367 Ω | 1630 Ω | 1922 Ω | 2417 Ω | 3182 Ω |

a) Berechne die zugehörige Ausgleichsgerade. Verwende die Widerstandswerte als Stützstellen $x_k$.

b) Welche Temperatur herrscht bei gemessenen 2000 Ω? Bitte gib mindestens 6 Nachkommastellen an!

c*) Berechne wieder das zugehörige Interpolationspolynom und den zugehörigen kubischen, natürlichen Interpolationsspline. Zeichne den Spline, das Polynom und die Gerade. Unterscheidet sich die Ausgleichsgerade von den Interpolanten sehr? Warum?

**Aufgabe 4, Programmierung: [QR-Zerlegung]** 4 Punkte

a) Implementiere einen Löser der mit Hilfe der QR-Zerlegung die Ausgleichslösung des (ggf. überbestimmten) Systems $Ax = b$ findet. Beachte: Ist $A = QR$ so ist $\|Ax - b\|_2^2 = \|Rx - Q^*b\|_2^2$. Ist das System überbestimmt, dann hat $R$ die Form $\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vereinbaren wir, dass $Q^*b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, wo $c_1$ dieselbe Anzahl an Zeilen hat wie $R_1$, so ist $R_1^{-1}c_1$ die Lösung des Ausgleichsproblems. Nutze diese Tatsache bei der Implentierung! Bedenke bei der Implementierung der QR-Zerlegung, dass für jede Householder-Spiegelung das Produkt $PA$ und $Pb$ mit Hilfe der Identitäten

$$PA = A - \frac{2}{v^*v}v(v^*A) \qquad Pb = b - \frac{2}{v^*v}v(v^*b)$$

effektiv ausgewertet werden kann. Die Funktion muss unbedingt in der Form `x = qrSolve(A,b)` implementiert werden.

b) Implementiere einen Algorithmus, der für Stützstellen $x$ und Daten $y$ unter allen Polynomen $n$-ten Grades das Polynom $p$ findet für das die Größe

$$\sum_i |p(x_i) - y_i|^2$$

minimiert wird. Die Funktion muss unbedingt in der Form `c = polyfit2(x,y,n)` implementiert werden. Dabei soll der Vektor `c` so sein, dass $p(x) = c(1)\lambda^n + c(2)\lambda^{n-1} + \ldots + c(n)\lambda + c(n+1)$.