# Übungsblatt Nr. 6

Abgabe Mittwoch, 09.12.2009 vor der Vorlesung

**Aufgabe 1: [Satz von Bendixson]** 4 Punkte

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nennt man die Matrix $A^*$, welche durch

$$(A^*)_{jk} = \overline{A_{kj}}$$

definiert ist, die zu $A$ (komplex-)*adjungierte Matrix*. Analog für $x \in \mathbb{C}^n$ ist $x^*$ definiert durch $(x^*)_j = \overline{x_j}$.

a) Sei $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so, dass $H = H^*$. Dann kann als bewiesen angenommen werden, dass die Matrix $H$ genau $n$ reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat und es existiert eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$U^*U = I \qquad \& \qquad U^*HU = D,$$

wo $I$ die Einheitsmatrix ist und $D$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von $H$ ist. Zeige:

$$\min_i \lambda_i \le \min_{x\neq 0} \frac{x^*Hx}{x^*x} \le \max_{x\neq 0} \frac{x^*Hx}{x^*x} \le \max_i \lambda_i.$$

Vergiss dabei nicht zu zeigen, dass jedes der Minima und Maxima wohldefiniert ist, d.h. insbesondere $\frac{x^*Hx}{x^*x} \in \mathbb{R}$.

b) Sei $E[M]$ die Menge aller Eigenwerte einer Matrix $M$. Zeige den *Satz von Bendixson*: Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und jedes $\lambda \in E[A]$ gilt

$$\min E[\tfrac{1}{2}(A + A^*)] \le \operatorname{Re}\lambda \le \max E[\tfrac{1}{2}(A + A^*)]$$

und

$$\min E[\tfrac{1}{2i}(A - A^*)] \le \operatorname{Im}\lambda \le \max E[\tfrac{1}{2i}(A - A^*)].$$

Vergiss wieder nicht zu zeigen, dass die Minima und Maxima wohldefiniert sind.

**Aufgabe 2: [Nullstellenabschätzungen]** 4 Punkte

Sei für $n \ge 1$ das Polynom $p_n$ gegeben durch

$$p_n(\lambda) = \lambda^n + \tfrac{1}{2^2}\lambda^{n-1} + \tfrac{1}{3^2}\lambda^{n-2} + \ldots + \tfrac{1}{n^2}\lambda + \tfrac{1}{(n+1)^2}.$$

Zeige oder widerlege: Für kein $n$ ist $-\pi$ eine Nullstelle von $p_n$. Tipp: Verbinde die Eigenwerte von

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit den Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$.

**Aufgabe 3: [B-Splines]** 4+1 Punkte

Eine Basis der Splines des Grades $M \geq 1$ auf dem Gitter $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ kann wie folgt konstruiert werden. Erweitere zuerst das Gitter zu $x_{-M} < x_{-M+1} < \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < x_{n+M}$. Definiere dann die Funktionen

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & x_i \leq t < x_{i+1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und rekursiv für $1 < m \leq M+1$

$$N_{i,m}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+m-1} - x_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{x_{i+m} - t}{x_{i+m} - x_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

Dann kann man zeigen, dass die Funktionen $N_{-M,M+1}, N_{-M+1,M+1} \ldots N_{n-1,M+1}$ eine Basis der Splines vom Grad $M$ auf dem Gitter $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ bilden. Zeige:

a) $N_{i,m}$ verschwindet ausserhalb von $[x_i, x_{i+m}]$

b) $N_{i,m}$ ist in $(x_i, x_{i+m})$ positiv

c) $\sum_i N_{i,m}(t) = 1$ für $x_0 < t < x_n$.

d*) $N'_{i,m}(t) = \frac{m-1}{x_{i+m-1} - x_i} N_{i,m-1}(t) - \frac{m-1}{x_{i+m} - x_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t)$.

**Aufgabe 4: [Splineinterpolation]** $4+\frac{1}{2}$ Punkte

Wie bekannt: Für einen temperaturabhängigen Widerstand sei folgende Kennkurve gegeben

| Temperatur | −50°C | −20°C | 0°C | 20°C | 50°C | 90°C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Widerstand | 1030 Ω | 1367 Ω | 1630 Ω | 1922 Ω | 2417 Ω | 3182 Ω |

a) Berechne den dazugehörigen natürlichen kubischen Interpolationsspline. Achtung! Verwende die Widerstandswerte als Stützstellen $x_k$.

b) Welche Temperatur herrscht bei gemessenen 2000 Ω? Bitte gib mindestens 6 Nachkommastellen an!

c*) Berechne wieder das zugehörige Interpolationspolynom. Zeichne den Spline und das Polynom. Unterscheiden sich beide Interpolaten sehr? Warum?

**(*) Aufgabe 5, Programmierung: [Kubische B-Splines]** 2 Punkte

Da die kubischen B-Splines eine Basis des Raumes der kubischen Splines bilden, lässt sich jeder kubische Spline zu $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ in der Form

$$s(t) = \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i N_{i,4}(t)$$

schreiben. Die Bedinungen, dass der Spline die Daten $y_0, \ldots x_n$ an den Stellen $x_0 < \ldots < x_n$ interpolieren soll und zusätzlich die Bedingung $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ erfüllen soll, lassen sich also als das System

$$\begin{aligned}
s''(x_0) &= \sum_{i=-3}^{-1} \alpha_i N''_{i,4}(x_0) = 0 \\
s(x_k) &= \sum_{i=-3}^{n-1} \alpha_i N_{i,4}(x_k) = y_k \qquad 0 \leq k \leq n \\
s''(x_n) &= \sum_{i=n-1}^{n-3} \alpha_i N''_{i,4}(x_n) = 0
\end{aligned}$$

formulieren. Schreibe eine Routine welche die Matrix des obigen Systems aufstellt. Schreibe weiter eine Auswertungsroutine, welche den Spline an einem zusätzlichen Vektor an Stellen auswertet. Die Routinen müssen die Form haben

```
A = spline_matrix(x)
```

und

```
yy = spline2(x,y,xx)
```

wo `x` und `y` die Vektoren mit den Stützstellen bzw. Daten sind und `xx` der zusätzliche Vektor der Stellen an denen der Spline ausgewertet werden muss... ist.
Für die Stützstellen $0 < 1 < \ldots < n$ ist die zugehörige Matrix gegeben ist durch

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Daran kannst du testen ob deine Routine zur Matrixberechnung richtig funktiert.