Zentrum für Technomathematik

Numerik I

WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

Übungsblatt Nr. 5

Abgabe Mittwoch, 02.12.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Lineare Splines] 4 Punkte

Sei $C^1_\Delta([a,b])$ der Raum der stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Gitter

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}.$$

Das heisst, $f \in C^1_\Delta([a,b])$, wenn $f \in C([a,b])$ und $f \in C^1([x_i, x_{i+1}])$ für alle i.
Weiter sei $f \in C^1_\Delta([a,b])$ und s der lineare Spline, welcher f auf dem Gitter Δ interpoliert. Zusätzlich sei die Norm $\|\cdot\|_2$ definiert durch

$$\|f\|_2^2 := \int_a^b |f(x)|^2 \, dx.$$

Zeige:

a) $\|f' - s'\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \|s'\|_2^2$.

b) Für jeden linearen Spline $\psi \in C^1_\Delta([a,b])$ gilt: $\|f' - s'\|_2 \leq \|f' - \psi'\|_2$.

c) Der Spline s ist unter allen Funktionen aus $g \in C^1_\Delta([a,b])$ welche f auf Δ interpolieren, die Funktion für die $\|g'\|_2$ minimal wird.

Aufgabe 2: [Gleichmäßige Konvergenz] 4 Punkte

Sei f eine auf $[a,b]$ zwei Mal stetig differenzierbare Funktion, Δ ein Gitter auf $[a,b]$ und s der zugehörige lineare, interpolierende Spline. Zeige, dass für alle $x \in [a,b] \setminus \Delta$ gilt

$$|s'(x) - f'(x)| \leq \tfrac{1}{2}\|f''\|_\infty \cdot \max_i \{x_{i+1} - x_i\}$$

Aufgabe 3: [Quadratische Splines] 4 Punkte

Sei Δ ein Gitter auf $[a,b]$ und $f_0, \ldots, f_N$ die zugehörigen Stützstellen.

a) Zeige, dass es für ein fest gewähltes f'_0 genau einen interpolierenden quadratischen Spline s gibt, der zusätzlich der Bedingung $s'(x_0) = f'_0$ genügt. Gib einen Algorithmus zur Berechnung von s an.

b) Betrachte jetzt den interpolierenden quadratischen Spline s der zusätzlich der periodischen Bedingung $s'(x_0) = s'(x_N)$ genügt. Existiert so ein Spline? Wenn ja, ist er eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4: [Ein kubischer Spline?] 4 Punkte

Ist die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} (x+1)+(x+1)^3 & -1 \leq x \leq 0, \\ 4+(x-1)+(x-1)^3 & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

ein kubischer Spline zu dem Gitter $\Delta = \{-1, 0, 1\}$?