Übungsblatt Nr. 4

Abgabe Mittwoch, 25.11.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Lagrange-Operatoren] 4 Punkte

Seien die Interpolationsstellen $-1 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq 1$ fest gewählt. Wir definieren dazu den Lagrange Operator L_n durch

$$L_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) \cdot f(x_i),$$

wo ℓ_i die Lagrange-Polynome sind, d.h. $\ell_i(x_j) = 0$ für $j \neq i$, $\ell_i(x_i) = 1$ und jedes ℓ_i ist ein Polynom n-ten Grades. Zeige:

a) Das Interpolationspolynom von f zu den Stellen $x_0, \ldots, x_n$ ist genau $L_n f$.

b) Der Operator L_n ist linear und als Operator von $C([-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ nach $C([-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ stetig. Weiter gilt $\|L_n\| = \|\sum_{i=0}^{n} |\ell_i|\|_\infty$.

c) Für jedes Polynom p vom Grad n gilt $L_n p = p$.

Aufgabe 2: [Gleichmäßige Konvergenz] 4 Punkte

Betrachte nun eine Folge von Operatoren L_n zu $(n+1)$ disjunkten Stützstellen in $[-1,1]$.

a) Zeige: Gilt für die zugehörigen Normen $\limsup \|L_n\| \to \infty$, so existiert eine Funktion $f \in C([-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ so dass $\limsup \|f - L_n f\| \to \infty$. Tipp: Wähle t_i und f_i geschickt $f = \sum_{i=0}^{\infty} t_i f_i$ und betrachte $L_n(t_n f_n) = L_n(f) - L_n(\sum_{i \neq n} t_i f_i)$.

b) Zeige oder widerlege, dass für die Lagrange-Operatoren zu äquidistanten Stützstellenstellen (mit $x_0 = -1$, $x_n = 1$) gilt $\|L_n\| \to \infty$.

c) Wie steht das in Beziehung zum Satz von Weierstrass?; dieser besagt, dass zu jeder Funktion $f \in C([-1,1])$ eine Folge von Polynomen (p_n) existiert mit $\|f - p_n\| \to 0$.

Aufgabe 3: [Aus der Vorlesung...] 4 Punkte

a) Zeige oder widerlege: Seien L_n die Lagrange-Operatoren zu jeweils $(n+1)$ Stützstellen aus dem Intervall $[0,1]$ und $f(x) = \sin(2\pi \cdot x)$, dann gilt

$$\|f - L_n f\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

b) Für einen temperaturabhängigen Widerstand sei folgende Kennkurve gegeben

Temperatur	-50°C	-20°C	0°C	20°C	50°C	90°C
Widerstand	$1030\,\Omega$	$1367\,\Omega$	$1630\,\Omega$	$1922\,\Omega$	$2417\,\Omega$	$3182\,\Omega$

.

Berechne das entsprechende Interpolationspolynom. Welche Temperatur herrscht bei gemessenen $2000\,\Omega$?

Aufgabe 4: [Interpolation als LGS] 4 Punkte

Sei f und $(n+1)$ Stützstellen x_i fest gewählt. Dann lässt sich die Interpolationsbedingung $p(x_i) = f(x_i)$ auch als ein LGS formulieren. Zum Beispiel für $n = 3$ muss erfüllt sein

$$\begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix},$$

wo $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$. Berechne so die Koeffizienten der Interpolationspolynome zu den Funktionen

a) $f(x) = \log_{10}(\frac{9}{2}(x+1)+1)$ b) $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ c) $f(x) = |x|$ d) $f(x) = (10 \cdot x^2 + 1)^{-1}$

mindestens für $(n+1) = 3, 5, 10, 20, 51, 100, 1001$. Benutze dabei folgende Stützstellen: Zuerst die äquidistanten Stützstellen im Intervall $[-1, 1]$ und dann die Chebyshev-Stellen $x_i = \cos(\pi \frac{i}{n})$ für $i = 0, \ldots, n$. Werte dann die Polynome in jedem Fall an mindestens 1000 Stellen im Intervall $[-1, 1]$ aus. Zeichne alle Polynome (mit zugehörigen Funktionen). Notiere deine Beobachtungen (bzgl. Numerik des Problems!).

(*) Aufgabe 5, Programmierung: [Newton-Interpolation] 4 Punkte

Berechne die Interpolanten der letzten Aufgabe mit dem Newton-Ansatz und werte sie mit dem Horner Schema aus. Das heisst berechne die dividierten Differenzen, welche rekursiv durch

$$f[x_k] := f(x_k) \qquad f[x_k, \ldots, x_{k+j}] := \frac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{k+j}] - f[x_k, \ldots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}$$

definiert ist. Du darfst als bewiesen annehmen, dass das Interpolations-Polynom p zu f und Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ gegeben ist durch

$$p(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Zur Erinnerung das Horner-Schema für das Polynom $p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ ist gegeben durch die Auswertung

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + c_3(x - x_2))).$$

Welche Unterschiede zur letzten Aufgabe hast du beobachtet?