Zentrum für
Technomathematik

Numerik I

WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

Übungsblatt Nr. 2

Abgabe Mittwoch, 11.11.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Gleitkommadivision] 4 Punkte

Zeige dass in erster Näherung gilt

$$|\hat{x}\hat{\cdot}\hat{y} - x \cdot y|/|x \cdot y| \leq 3u,$$

wobei $\hat{x}$ und $\hat{y}$ die Maschinendarstellungen von x und y sind, $\hat{\cdot}$ die Maschinenrealisierung der Multiplikation und u die Maschinengenauigkeit ist. Mit 'erster Näherung' ist gemeint, dass Glieder höherer Ordnung wie z.B. $u^2, u^3, u^4, \ldots$ vernachlässigt werden können.

Aufgabe 2: [Matrixnormen] 4 Punkte

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\|\cdot\|$ eine Vektornorm. Dazu werde eine Matrixnorm wie folgt definiert

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A \cdot x\| \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass obige Definition der Matrixnorm äquivalent zu folgender Darstellung ist:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} \quad .$$

b) Zeigen Sie, dass $\|A\| \geq \varrho(A)$ gilt. Dabei steht $\varrho(A)$ für den Spektralradius von A, also den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwertes von A.

c) Zeige, dass die von $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ induzierte Matrix-Norm die Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

ist.

Aufgabe 3: [LGS] 4 Punkte

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ändere einen Eintrag von A so ab, dass die Gleichung $Ax = b$ mehr als eine Lösung hat.

Aufgabe 4: [Matrix mit enthaltener Dreiecksstruktur] 4 Punkte

Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der $(n+1) \times (n+1)$-Matrix A.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline u & 0 \end{array} \right)$$

Dabei sei M eine reguläre obere $n \times n$-Dreiecksmatrix, $u \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $\{x, b\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeige: Die Gleichung $Ax = b$ besitzt eine Lösung, wenn $u \cdot M^{-1} \cdot v \neq 0$. Tipp: LR-Zerlegung.

Aufgabe 5: [Matrix mit enthaltener Diagonalstruktur] 4 Punkte

Gegeben sei die schwach besetzte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & & & \\ * & & * & & \\ * & & & * & \\ * & & & & * \end{pmatrix},$$

wobei $*$ für beliebige von null verschiedene Elemente steht.

a) Zeige, dass bei der Gauss-Elimination im ersten Hauptschritt (sprich: Elimination der ersten Spalte) alle ursprünglichen Nullen zerstört werden.

b) Finde Permutationsmatrizen P_1 und P_2 derart, dass bei Anwendung der Gauss-Elimination auf $P_1 \cdot A \cdot P_2$ alle vorhandenen Nullen erhalten bleiben. Wie groß ist der Aufwand der Gauss-Elimination angewandt auf $P_1 \cdot A \cdot P_2$?
Hinweis: Bei einer Permutationsmatrix steht in jeder Zeile und jeder Spalte jeweils genau eine Eins und alle restlichen Einträge sind null.