



Zentrum für
Technomathematik

Numerik I
WS 2009/10
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/numerik_i_ws09/

Übungsblatt Nr. 1

Abgabe Mittwoch, 04.11.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Dezimalsystem]

4 Punkte

Eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ heißt rational wenn es Zahlen $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $r = p/q$. Zeige oder widerlege

- Eine rationale Zahl besitzt eine eindeutige Entwicklung im Dezimalsystem.
- Eine reelle Zahl ist genau dann rational, wenn jede mögliche Entwicklung im Dezimalsystem ab einer gewissen Stelle periodisch ist.

Aufgabe 2: [TAYLOR-Approximation]

4 Punkte

Viele elementare Funktionen lassen sich mit TAYLOR-Entwicklungen annähern. Beispiele:

- $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}$ für $x \approx 0$
- $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ für $x \approx 0$

Rechne die obigen Formeln nach. Für welche x ist der Approximationsfehler der TAYLOR-Näherung kleiner als die Maschinengenauigkeit 10^{-7} ?

Aufgabe 3: [Differentiation]

4 Punkte

Es seien punktweise Messungen $\hat{f}(x)$ von $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gegeben mit Meßfehler

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Weiter sei der zentrale Differenzenquotient gegeben durch

$$df(x) := \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x-h)}{2h}.$$

- Zeige: Ist f eine drei Mal stetig differenzierbare, 1-periodische Funktion, so existieren zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass

$$\|df(x) - f'(x)\|_\infty \leq C_1 h^2 + C_2 h^{-1}.$$

- Wie muss h gewählt werden, damit die rechte Seite der oberen Ungleichung minimal wird?