Projektionen & Darstellungen

Notiztitel 12.03.2014

Vorausgesetzt: $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis von V, $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-SP

Synthesis

$$S : \mathbb{R}^n \to V$$

$$S\vec{c} = \sum c_i b_i$$

Analysis

$$A : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(Av)_i = \langle v, b_i \rangle$$

beachten Sie, hier ist das SP in $\underline{V}$ gemeint

Fakt: Zu jedem linearen Operator $L: V \to V$ existiert eine Matrix $\mathbb{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s.d.

$$L S = S \mathbb{L}$$

$\mathbb{L}$ ist dann die Darstellung von L bzgl. der Basis in V.

Bem: - $\mathbb{L}$ ist abhängig von der Basis (klar!)
- $\mathbb{L}$ ist <u>un</u>abhängig von dem SP auf V (warum?)

Bsp.: $V = \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$ $\quad$ ($1, x, x^2$ die Basis in V)

$L : V \to V$ der Ableitungsoperator dann:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Denn

$$2c_2 x + c_1 = L\left(c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right) = L\,S\,c \qquad S\mathbb{L}c = S\begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot x^2 + 2c_2 x + c_1$$

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Wie kommt man zu $\mathbb{L}$?

1.) Nach Voraussetzung an $\mathbb{L}$ muss gelten $LS = S\mathbb{L}$

2.) Nach "multiplizieren" mit A auf beiden Seiten $ALS = AS\mathbb{L}$

3.) AS ist aber genau die (Gram-Matrix der Basis in V (vgl. A2b))

4.) Damit ist AS eine Matrix & invertierbar

5.) $\rightsquigarrow$ $\mathbb{L} = (AS)^{-1} ALS$

Wir wählen als Skalarprodukt auf V das übliche SP

$$\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt$$

Damit wissen wir aus Aufgabe 2.6

$$AS = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Es bleibt noch ALS auszurechnen

$$
ALS\vec{c} = AL\left(c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right)
$$

$$
= A\left(2c_2 x + c_1\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} \langle 2c_2 x + c_1 , 1 \rangle \\ \langle 2c_2 x + c_1 , x \rangle \\ \langle 2c_2 x + c_1 , x^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 + c_1 \\ \frac{2}{3} c_2 + \frac{1}{2} c_1 \\ \frac{2}{4} c_2 + \frac{1}{3} c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark
$$

Test: Führen Sie das obige Vorgehen für

$$V = \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$$ für großes n ($n = 100$ oder so)

durch (wo nötig verwenden Sie eine numerische Software wie MATLAB/Octave)

- Verdeutlichen Sie sich so daß dieses Vorgehen um Π rauszufinden im Allgemeinen unpraktikabel ist
- Woran scheitert das Vorgehen?
- Wie kann man dem abhelfen?

Bsp.: Orthogonalprojektion auf U (UR von V)

Idee: $P : V \to V$ und in der Darstellungsform $PS = SP$, $PS : \mathbb{R}^n \to V$

es „fehlt" uns also eine Abbildung die $V \to \mathbb{R}^n$ abbildet (möglichst surjektiv) aber wir kennen so eine Abbildung, denn $A : V \to \mathbb{R}^n$

$$P = SMA$$

was ist das?

wenn die obige Darstellung gilt

$\rightsquigarrow$ $PS = SP$ $\rightsquigarrow$

& $PS = SMAS$

Gramsche Matrix von der Basis auf V

Programm: 1.) Finde P

2.) Ermittle M aus P & $G = AS$

<u>Trick:</u> Wähle eine günstige Basis für V:

$$\overbrace{\{\underbrace{b_1, \dots, b_m}_{\text{Basis von } U}, b_{m+1}, \dots, b_n\}}^{\text{Basis von } V}$$

Gram Schmidt $\rightsquigarrow \{\underbrace{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m}_{\text{ONB in } U}, \underbrace{\tilde{b}_{m+1}, \dots, \tilde{b}_n}_{\rightsquigarrow \text{ ONB in } U^\perp}\}$ (denn $V = U \oplus U^\perp$)

$$\rightsquigarrow \{\underbrace{b_1, \dots, b_m}_{\text{Basis von } U}, \underbrace{\tilde{b}_{m+1}, \dots, \tilde{b}_n}_{\text{Basis von } U^\perp}\}$$

$$S = \left[\begin{array}{c|c} S_U & S_{U^\perp} \end{array}\right]$$

1.) $PS = [PS_U \mid PS_{U^\perp}]$

$= [S_U \mid 0]$

$= [S_U \mid S_{U^\perp}] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{=\mathbb{P}}$

$\rightsquigarrow$

2.) $AS = [AS_U \mid AS_{U^\perp}]$

$\begin{bmatrix} A_U \\ \hline A_{U^\perp} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A_U S_U & A_U S_{U^\perp} \\ A_{U^\perp} S_U & A_{U^\perp} S_{U^\perp} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} G_U & 0 \\ 0 & G_{U^\perp} \end{bmatrix}$

3.) $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P} = M \cdot AS$

$M = \mathbb{P}(AS)^{-1} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_U^{-1} & 0 \\ 0 & G_{U^\perp}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_U^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4.) $P = A\,M\,S$

$= \begin{bmatrix} A_U \\ \hline A_{U^\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_U^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [S_U \mid S_{U^\perp}]$

$\boxed{P_U = A_U\, G_U^{-1}\, S_U}$