Übungsblatt Nr. 10

Abgabe Freitag, 21.01.2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Riesz-Basen, Frames] 4 Punkte

Zur Erinnerung: Ein System von Funktionen heißt *Orthonormalbasis*, falls alle Elemente des Systems normiert und zueinander orthogonal sind und das System aller endlichen Linearkombinationen dicht ist. Welche der folgenden Aussagen ist wahr:

a) Jede Orthonormalbasis ist eine Riesz-Basis.

b) Jede Riesz-Basis ist eine Orthonormalbasis.

c) Jede Riesz-Basis ist ein Frame

d) Jedes Frame ist eine Riesz-Basis.

(Tipp: Natürlich können Aussagen aus der Vorlesung verwendet werden.)

Aufgabe 2: [Schauder-Basen] 4 Punkte

Ein System von Funktionen heißt *Schauder-Basis* falls jeder Vektor eine eindeutige Darstellung bezüglich dieses Systems besitzt, d.h. (e_n) ist Schauder-Basis genau dann wenn es zu jedem x nur ein (ξ_n) gibt so dass $x = \sum \xi_n e_n$. Zeige oder widerlege:

a) Jede Schauder-Basis ist eine Riesz-Basis.

b) Jede Riesz-Basis ist eine Schauder-Basis.

c) Jede Schauder-Basis ist ein Frame.

d) Jedes Frame ist eine Schauder-Basis.

Aufgabe 3: [RIP, FBI-Eigenschaft] 4 Punkte

Man sagt ein Operator besitze die RIP (restricted injectivity property) bzw. die FBI-Eigenschaft (finite basis injectivity) bezüglich einer Orthonormalbasis des Urbilds, falls dieser, eingeschränkt auf jeden Unterraum, der von nur endlich-vielen Elementen der Basis aufgespannt wird, injektiv ist.

a) Zeige oder widerlege: Es existiert ein Operator der nicht injektiv ist, aber die FBI-Eigenschaft besitzt.

b*) Zeige oder widerlege: Es existiert ein Operator der nicht injektiv ist, aber eingeschränkt auf einen beliebigen endlich-dimensionalen Unterraum injektiv ist.