Zentrum für Technomathematik

Inverse Probleme
WS 2010/2011
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ws10/

---

# Übungsblatt Nr. 9
Abgabe Freitag, 14.01.2011 vor der Vorlesung

**Aufgabe 1: [Diskretisierung des Integraloperators]** 4 Punkte

Sei $A$ der Integraloperator $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, mit $(Af)(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$. Für festes $l \in \mathbb{N}$ definieren wir die stückweise konstanten Funktionen

$$\varphi_{l,i} := \chi_{[x_i, x_{i+1})}$$

mit $x_i = ih$, $h = \frac{1}{l}$, $i = 0, \ldots, l$ sowie den Raum $X_l$ welcher durch die Basis $\Phi_l := (\varphi_{l,0}, \ldots, \varphi_{l,l-1})$ aufgespannt wird. Weiter sei

$$Y_l = X_l.$$

a) Bestimme $G_{X_l}$ und $G_{Y_l}$.

b) Bestimme $\mathbb{A} = A_{Y_l} A S_{X_l}$, wo $A_{Y_l}$ der Analyseoperator und $S_{X_l}$ der Syntheseoperator ist.

c) Ist die Gleichung

$$\mathbb{A}_l \xi = A_{Y_l} y^\delta$$

eindeutig lösbar.

**Aufgabe 2: [Projektionsverfahren]** 4 Punkte

Es sei $A : X \to Y$ kompakt, linear und stetig mit Singulärwertzerlegung $(\sigma_n, u_n, v_n)$. Sei $I_\alpha = \{i, \text{ so dass } \sigma_i \geq \alpha\}$. Wähle

$$X_\alpha = \operatorname{span}\{u_i, i \in I_\alpha\}$$
$$Y_\alpha = \operatorname{span}\{v_i, i \in I_\alpha\}.$$

Das zugehörige Projektionsverfahren liefe die Rekonstruktion

$$x_\alpha^\delta = \operatorname*{argmin}_{x \in N(A_h)^\perp} \|A_h x - P_{Y_\alpha} y^\delta\|^2$$

mit $A_h = P_{Y_\alpha} A P_{X_\alpha}$. Ist das ein neues oder ein bekanntes Verfahren?

**Aufgabe 3: [Duale Fehlerquadratmethode]** 4 Punkte

Sei $A : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator zwischen den reellen Hilberträumen $X$ und $Y$ und $g \in Y$. Die duale Fehlerquadratmethode ist ein Projektionsverfahren, bei dem man eine Basis $\Psi_l = \{\psi_{l,1}, \dots, \psi_{l,m_l}\}$ von $Y_l$ wählt und $X_l = A^* Y_l$ setzt. Die Basis $\Psi_l$ sei so gewählt, dass $Y_l \subset \mathcal{N}(A^*)^\perp$ gilt. Dann bilden die Funktionen $\varphi_{l,i} = A^*\psi_{l,i}$ eine Basis von $X_l$. Sei $A_l = Q_l A P_l$ mit den orthogonalen Projektionen $P_l$ auf $X_l$ und $Q_l$ auf $Y_l$.

a) Zeige: $A_l = Q_l A$. **Hinweis:** Spalte $x \in X$ in Anteile in $X_l$ und $X_l^\perp$ auf und zeige die Aussage erst für beide Teile getrennt.

b) Zeige, dass die Normalengleichung $A_l^* A_l f_l = A_l^* Q_l g$ zum Gleichungssystem

$$\mathbb{A}_l \xi_l = q_l(g)$$

führt, wobei $\xi_l$ der Koordinatenvektor von $f_l$ bzgl. $\varphi_{l,i}$ ist, d.h. $f_l = \sum_{i=1}^{m_l} (\xi_l)_i \varphi_{l,i}$, und

$$(\mathbb{A}_l)_{i,j} = \langle A^*\psi_{l,i}, A^*\psi_{l,j}\rangle \quad \text{und} \quad q_l(g)_i = \langle g, \psi_{l,i}\rangle.$$

c) Ist das Gleicungsystem eindeutig lösbar?

**Aufgabe 4, Programmierung: [Duale Fehlerquadratmethode]** 4 Punkte

Wir wollen die Gleichung $Af = g$ mit dem Integraloperator

$$A : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \quad (Af)(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

mit Hilfe der Fehlerquadratmethode lösen. Dazu diskretisiere das Interval $[0,1]$ an den $l+1$ Stellen $x_i = ih$, $h = \frac{1}{l}$, $i = 0, \dots, l$ und verwende die stückweise konstanten Funktionen $\psi_{l,i} := \chi_{[x_{i-1}, x_i)}$, $i = 1, \dots, l$. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\mathbb{A}_l \xi_l = q_l(g) \quad \text{und es gilt} \quad (\mathbb{A}_l)_{i,j} = \begin{cases} (i - \frac{2}{3})h^3 & , i = j \\ (\min\{i,j\} - \frac{1}{2})h^3 & , i \neq j. \end{cases}$$

für $i, j = 1, \dots, l$. Zum Auswerten der rechten Seite $q_l(g)_i = \langle g, \psi_{l,i}\rangle$ diskretisiere das Intervall $[0,1]$ äquidistant an $N = 5000$ Stellen und benutze die Trapezregel.

a) Für $g(x) = x(1-x)$ und $l = 20$ berechne Sie die Lösung $f_l = \sum_{i=1}^{l} (\xi_l)_i \varphi_{l,i}$. Hierfür benötigst du erst die Funktionen $\varphi_{l,i} = A^*\psi_{l,i}$. Plotte $f_l$ zusammen mit der echten Lösung $f^\dagger$.

b) Verrausche $g$ zu $g^\delta$ mit punktweise normalverteiltem Rauschen mit Standardabweichung 0.1 und wiederhole a).

c) Für $l = 1, 2, \dots, 50$ berechne den relativen Fehler $\|f^\dagger - f_l\|_2 / \|f^\dagger\|_2$. Zur Auswertung der Norm kannst du wieder die Trapezregel verwenden. Plotte den Fehler über $1/l$. Bei welchem $l$ wird der minimale Fehler erreicht?

d) Zum Vergleich wollen wir die Operatorgleichung *überdiskretisieren* und zusätzlich Tikhonov-Regularisierung verwenden. Hierbei ergibt sich das Gleichungssystem

$$(\mathbb{A}_l^2 + \alpha h I)\xi_l = \mathbb{A}_l q_l(g).$$

Verwende $l = 100$ und verschiedene $\alpha$ aus dem Intervall $[10^{-9}, 10^{-7}]$. Plotte den relativen Fehler gegen $\alpha$. Bei welchem $\alpha$ wird der minimale Fehler erreicht? Vergleiche den minimalen relativen Fehler mit c).