Übungsblatt Nr. 7

Abgabe Freitag, 17.12.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Morozov mal anders] 4 Punkte

Betrachte Operator $A : X \to Y$ linear und stetig und seine Tikonov-Regularisierung $T_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*$. Zu gegebenen Daten g^δ bezeichne $f_\alpha^\delta = T_\alpha g^\delta$. Der Parameter α sei nach Morozov Diskrepanzprinzip bestimmt, d.h. es gelte

$$\|Af_\alpha^\delta - g^\delta\| = \tau\delta, \qquad \tau > 1 \quad \text{nicht zu groß.}$$

Zeigen Sie

a) f_α^δ löst Minimierungsproblem

$$\min \|f\| \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \|Af - g^\delta\| = \tau\delta$$

b) Ist $\|f_\alpha^\delta\| = M$, so löst f_α^δ das Minimierungsproblem

$$\min \|Af - g^\delta\| \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \|f\| = M$$

Aufgabe 2: [Keine bessere Konvergenzrate für Mozorov als $\delta^{1/2}$] 4 Punkte

Es sei $A : X \to Y$ kompakt, linear und stetig mit Singulärwertzerlegung (σ_n, u_n, v_n) und $T_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*$. Es sei weiterhin $\delta_n = \sigma_n^2$ eine positive Nullfolge. Definiere $g := v_1$, $g_n := g + \delta_n v_n$ und $f^\dagger := A^\dagger g$. Es sei α_n der Regularisierungsparameter nach Morozov, d.h.

$$\|Af_{\alpha_n} - g_n\| = \tau\delta_n, \qquad \tau > 1 \quad \text{nicht zu groß.}$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung

$$\alpha \longmapsto \|T_\alpha g_n - f^\dagger\|$$

ist monoton, stetig und das Morozovsche Diskrepanzprinzip ist wohldefiniert für

$$1 < \tau < \sqrt{1 + \frac{1}{\|A\|^4}}.$$

b) Es gilt

$$\|T_\alpha g_n - f^\dagger\| \geq \frac{\sqrt{\delta_n}}{1 + \frac{\alpha}{\delta_n}}.$$

c) $\{\alpha_n\}$ sind beschränkt, d.h. $\alpha_n \leq \mathcal{C}$, $\forall n$

d) Es gilt

$$\tau\delta_n \geq \frac{\alpha_n}{\sigma_1^2 + \alpha_n}.$$

e) Folgerung: Es existiert eine Konstante $\mathcal{C}$ s.d.

$$\|T_{\alpha_n} g_n - f^\dagger\| \geq \mathcal{C}\sqrt{\delta_n}$$

Aufgabe 3, Programmierung: [Radon-Transformation] 4 Punkte

Die Radon-Transformation bildet ein Bild f ab auf Linienintegralen mit Abstand s zum Ursprung und im Winkel ϕ,

$$(Af)(\phi, s) = g(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} f(\omega s + \omega^\perp t) dt,$$

wobei $\omega = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ und $\omega^\perp = (-\sin(\phi), \cos(\phi))$ ist. Die Radon-Transformation modelliert die Durchleuchtung eines Körpers von allen Seiten mit Röntgenstrahlen. Das Bild g, welches dabei entsteht, nennt man *Sinogramm* (s. Abbildung links).

Die Radon-Transformation sowie deren Adjungierte ist in den Programmen `netz.m`, `radon.cpp` und `radon_adjoint.cpp` vorimplementiert. Die beiden letzten Dateien sind C++ Dateien und sind von Matlab aus nicht direkt verwendbar. Sie müssen erst kompiliert werden mit den Befehlen `mex -O radon.cpp` und `mex -O radon_adjoint.cpp`. Eventuell muss der Mex-Kompiler erst mit `mex -setup` konfiguriert werden (benutzen Sie den Lcc-Kompiler). Auf der Vorlesungs-Homepage findest du auch die Datei `sinogramm.mat`, die das unten dargestellte verrauschte Sinogram enthält.

a) Implementiere das cg-Verfahren mit Startpunkt $f_0 = 0$ und stoppe es mit

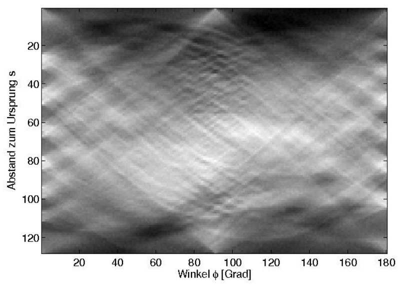
   1) Morozovsche Diskrepanzprinzip
   2) L-kurven Kriterium

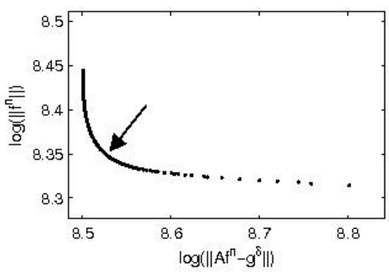
b) Für die Tikhonov-Regularisierung $T_\alpha g^\delta$ mit

$$T_\alpha g^\delta = \text{argmin}\, \|Af - g^\delta\|^2 + \alpha\|f\|^2$$

implementiere das Morozovsche Diskrepanzprinzip als eine Nullstellensuche. Implementiere insbesondere: Bisektion, Regula-Falsi und das Newton-Verfahren. Teste deine Implementierungen am Sinogram.

c) Implementiere das Morozovsche Diskrepanzprinzip für die Tikhonov-Regularisierung $T_\alpha g^\delta$ mit Modell Funktionen.





Zum L-Kurven Kriterium: Plotte $\log(\|f^n\|)$ gegen $\log(\|Af^n - g^\delta\|)$ (s. Abbildung rechts), wobei f^n die n-te Iterierte ist. Es entsteht eine Kurve in der Form eines L, die von rechts unten nach links oben durchlaufen wird. Brich ab, wenn die Iterierte die Ecke des L passieren. In der Abbildung markiert der Pfeil diesen Punkt.