



Zentrum für
Technomathematik

Inverse Probleme
WS 2010/2010
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ws10/

Übungsblatt Nr. 6
Abgabe Freitag, 10.12.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Landweber-Iteration (Regularisierung)]

4 Punkte

Sei

$$F_\alpha(\sigma) = 1 - (1 - \beta\sigma^2)^n \quad 0 < \beta < \frac{2}{\|A\|^2} \quad \alpha \sim \frac{1}{n}.$$

Zeige die Regularisierungseigenschaften des Filters. Insbesondere:

a) Für jedes $0 \leq \sigma \leq \|A\|$ gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F_\alpha(\sigma) = 1.$$

b) Für alle $0 < \sigma \leq \|A\|$ und α gilt

$$|F_\alpha(\sigma)| \leq 2.$$

c) Für alle hinreichend kleinen α und $0 < \sigma \leq \|A\|$ gilt

$$\sup_{\sigma} \sigma^{-1} |F_\alpha(\sigma)| \leq \sqrt{\beta n}.$$

Aufgabe 2: [Landweber-Iteration (Qualifikation)]

4 Punkte

Welche Qualifikation hat der Landweber-Filter?

Aufgabe 3: [Ein Kessel Buntes]

4 Punkte

a) Zeige, dass für die Iterierten des Landweberverfahrens $f_{n+1} = f_n - \beta A^*(Af_n - g^\delta)$ mit $0 < \beta < 2/\|A\|^2$

$$\|Af_{n+1} - g^\delta\|^2 < \|Af_n - g^\delta\|^2$$

gilt.

b) Zeige, dass das cg-Verfahren nicht linear ist. Sind die TSVD, das Landweber-Verfahren und das Tikhonov-Verfahren linear?

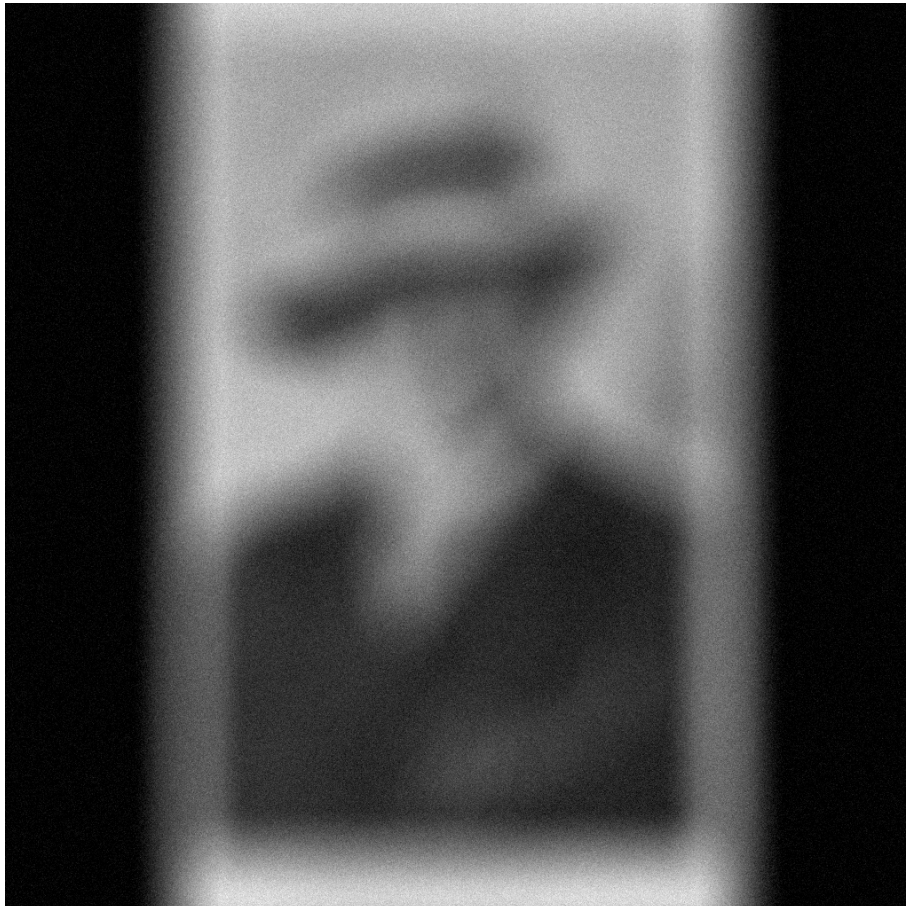
Aufgabe 4, Programmierung: [Entfalten]

4 Punkte

Sind k und f komplexe Matrizen, so ist die (diskrete, periodische) Faltung dieser Matrizen $k * f$ definiert durch den Faltungssatz

$$\text{fft2}(k * f) = \text{fft2}(k) .* \text{fft2}(f).$$

Wer ist auf dem folgenden [Bild](#) zu sehen?



In der Tat wurde das Bild durch

$$\begin{aligned} g &= k * f \\ g^\delta &= \text{round}(g + 10 * \text{randn}(\text{size}(g))) \end{aligned}$$

erzeugt. Wobei der Kern

$N = \text{size}(f, 1)$; $[X, Y] = \text{meshgrid}((-N/2:N/2-1) * 2 * \pi / N)$; $k = \text{double}((X.^2 + Y.^2 < .1))$ verwendet wurde. Und $\text{norm}(g - g^\delta) \leq 666$ gilt.
(In MATLAB kann das Bild mittels `double(imread('gDelta1.tif'))` eingelesen werden.)