Übungsblatt Nr. 5

Abgabe Freitag, 03.12.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Tikhonov-Phillips-Regularisierung] 4 Punkte

Sei $g^\delta \in Y$ und $A : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator zwischen den Hilberträumen X und Y mit SWZ (σ_n, u_n, v_n). Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\min_{f \in X} \|Af - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|f\|_\mu^2.$$

a) Zeige, dass der Minimierer durch

$$T_\alpha g := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha \sigma_n^{-2\mu}} \langle g, v_n \rangle u_n$$

gegeben ist. Wie sieht die Filterfunktion F_α für dieses T_α aus?

b) Zeige dass, für $\mu \geq -\frac{1}{2}$ für die Filterfunktion F_α gilt

$$\begin{aligned} \sup |F_\alpha(\sigma_n)\sigma_n^{-1}| &= c(\alpha) < \infty, \\ \lim_{\alpha \to 0} F_\alpha(\sigma_n) &= 1 \qquad \text{punktweise in } \sigma_n, \\ |F_\alpha(\sigma_n)| &\leq c \qquad \forall \alpha, \sigma_n. \end{aligned}$$

c*) Bestimme die Qualifikation der Filterfunktion F_α.

Aufgabe 2: [Konvexität] 4 Punkte

Sei $g^\delta \in Y$ und $J_\alpha : X \to \mathbb{R}$ das Tikhonov-Funktional gegeben durch

$$J_\alpha(f) = \|Af - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|f\|_X^2.$$

Zeige:

a) Für $\alpha > 0$ ist J_α *strikt konvex*, d.h. für alle $f_1 \neq f_2$ und $0 < t < 1$ gilt

$$J_\alpha((1-t)f_1 + tf_2) < (1-t)J_\alpha(f_1) + tJ_\alpha(f_2).$$

b) Der Minimierer von J_α ist eindeutig, d.h. sind $f_1, f_2 \in X$ mit $J_\alpha(f_1) = J_\alpha(f_2) = \min_{f \in X} J_\alpha(f)$, so folgt $f_1 = f_2$.

Aufgabe 3: [Tikhonov-Funktional] 4 Punkte

Sei (σ_n, u_n, v_n) die SWZ von A und $g^\delta \in Y$ mit $g^\delta \neq D(A^\dagger) = \mathrm{rg}(A) \oplus \mathrm{rg}(A)^\perp$. Es bezeichne f_α^δ den Minimierer des Tikhonov-Funktionals $J_\alpha : X \to \mathbb{R}$, d.h.

$$f_\alpha^\delta = \operatorname*{argmin}_{f \in X} J_\alpha(f) \quad \text{mit} \quad J_\alpha(f) = \|Af - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|f\|_X^2.$$

Zeige:

a) Der Wert $\psi(\alpha) := \|f_\alpha^\delta\|_X^2$ ist monoton fallend in α mit

$$\lim_{\alpha \to 0} \psi(\alpha) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to \infty} \psi(\alpha) = 0.$$

b) Das Residuums-Funktional $r(\alpha) := \|Af_\alpha^\delta - g^\delta\|_Y^2$ ist monoton steigend in α mit

$$\lim_{\alpha \to 0} r(\alpha) = \|P_{\overline{\mathrm{rg}(A)}} g^\delta - g^\delta\|_Y^2 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to \infty} r(\alpha) = \|g^\delta\|_Y^2.$$

c) Der Wert des Tikhonov-Funktional $J_\alpha(f_\alpha^\delta)$ im Minimum f_α^δ ist monoton steigend in α mit

$$\lim_{\alpha \to 0} J_\alpha(f_\alpha^\delta) = \|P_{\overline{\mathrm{rg}(A)}} g^\delta - g^\delta\|_Y^2 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to \infty} J_\alpha(f_\alpha^\delta) = \|g^\delta\|_Y^2.$$

Dabei bezeichnet $P_{\overline{\mathrm{rg}(A)}} g^\delta = \sum_n \langle g^\delta, v_n \rangle v_n$ die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathrm{rg}(A)}$.

Aufgabe 4, Programmierung: [Integraloperators] 4 Punkte

Wir betrachten weiter den Integraloperator $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$,

$$f \mapsto Af \text{ mit } (Af)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Weiter seien die Funktionen f_1 und f_2 gegeben durch

$$f_1(t) := \mathrm{sign}(x - \tfrac{1}{2}) \quad \text{und} \quad f_2(t) = \sin(\pi t).$$

- Für welche μ ist $\|f_1\|_\mu < \infty$, für welche μ ist $\|f_2\|_\mu < \infty$?
- Implementiere die Tikhonov-Regularisierung aus diesen Blatt mit der Diskretisierung $\mathbf{A}$ aus Blatt 2.
- Berechne $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1 := \mathbf{A}\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{g}_2 := \mathbf{A}\mathbf{f}_2$ für $N = 300$.
- Diskretisiere die $L^2(0,1)$-Norm mit Hilfe von $\mathbf{A}$.
- Für $\delta = 10^0, 10^{-1}, \ldots, 10^{-10}$ verrausche die Vektoren $\mathbf{g}_1$ und $\mathbf{g}_2$, so dass $\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\delta\|_{l^2} = \delta$ und $\|\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\delta\|_{l^2} = \delta$ gilt, wobei $\|\cdot\|_{l^2}$ die diskretisierte Norm bezeichnet.
- Für jede der verrauschten Versionen berechne den Parameter N in der TSVD und dem Landweber-Verfahren, bzw. den Parameter α im Tikhonov-Verfahren, so dass der Abstand zwischen der regularisierten Version und der ursprünglichen Version minimal ist. Trage die Abstände in einer Tabelle zusammen. Erkläre die Ergebnisse.