Zentrum für
Technomathematik

Inverse Probleme
WS 2010/2011
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ws10/

Übungsblatt Nr. 4

Abgabe Freitag, 26.11.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Truncated SVD] 4 Punkte

Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L_2([0,1])$. Wir definieren $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ durch

$$Af := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\langle f, u_n\rangle u_n$$

und wählen ein $f^\dagger \in L_2([0,1])$. Weiter sei $g^\dagger$ definiert durch $g^\dagger := Af^\dagger$ und $g^\delta \in L_2([0,1])$ so gewählt, dass $\|g^\delta - g^\dagger\|_{L_2([0,1])} \leq \delta$. Zuletzt sei $T_N : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ definiert durch

$$T_N f := \sum_{n=1}^{N} n\langle f, u_n\rangle u_n.$$

a) Zeige oder widerlege: $f \in X_\nu$ mit $\nu > 2$ so gilt

$$R(N) := \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} |< f, u_n >|^2} \leq c \cdot N^{-2}.$$

b) Zeige

$$\|T_N A f^\dagger - f^\dagger\| \leq R(N),$$
$$\|T_N(g^\dagger - g^\delta)\| \leq \delta \cdot N,$$

und bestimme optimales $N = N(\delta)$ bezüglich der rechten Seite der Abschätzung

$$\|f^\dagger - T_N g^\delta\| \leq \|f^\dagger - T_N g^\dagger\| + \|T_N g^\dagger - T_N g^\delta\|.$$

c) Welche Konvergenzrate bezüglich δ wird erreicht?

Aufgabe 2: [Interpolationsungleichung] 4 Punkte

Sei $\theta \in [0,1]$ und $0 \leq \mu < \nu$. Zeigen Sie

$$\|f\|_{\nu\theta+(1-\theta)\mu} \leq \|f\|_{\nu}^{\theta}\|f\|_{\mu}^{1-\theta}$$

Aufgabe 3: [Funktionalkalkül für kompakte Operatoren] 4 Punkte

Sei X und Y Hilberträume und sei $A \in \mathrm{L}(X,Y)$. Zeigen Sie

$$rg(A^*) = rg((A^*A)^{1/2}).$$

Hinweis: Verwenden Sie der Picard-Bedingung.

Aufgabe 4, Programmierung: [Diskretisierungen der Faltung] 4 Punkte

Seien $f, k \in \mathbb{C}^N$ komplexwertige Vektoren. Die diskrete Fouriertransformation $\texttt{fft(}f\texttt{)}$ von f ist definiert durch

$$\texttt{fft(}f\texttt{)}_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \omega_N^{mn}, \quad \omega_N := e^{-2\pi i/N},\ n = 0, \ldots, N-1.$$

Die Inverse der Fouriertransformation $\texttt{ifft(}f\texttt{)}$ ist dann gegeben durch

$$\texttt{ifft(}f\texttt{)}_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n \omega_N^{-nm}, \quad m = 0, \ldots, N-1.$$

Zuletzt ist die diskrete (periodische) Faltung definiert durch

$$(f * k)_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m k_{n-m},$$

wobei k, wo nötig, periodisch auf $\mathbb{Z}$ fortgesetzt wird, d.h. $f_{n+mN} := f_n$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Zur Erinnerung: Die kontinuerliche Faltung auf dem Raum $L^2_{2\pi}$ der 2π-periodischen, quadrat-integrablen Funktionen ist wie gewohnt definiert durch

$$(k * f)(x) = \int_0^{2\pi} f(y)k(x-y)\,dy.$$

a) Ist die diskrete Faltung eine Näherung der kontinuerlichen Faltung? (bis auf von f und k unabhängige Konstanten)

b) Beweise die folgende diskrete Version des Faltungssatzes

$$\texttt{fft(}k\texttt{).*fft(}f\texttt{)} = \texttt{fft(}k * f\texttt{)}.$$

c) Für ein fest gewähltes k sei A definiert durch

$$Af = k * f\ .$$

Implementiere die verallgemeinerte Inverse und die TSVD von A. (Tipp: Faltungssatz)

d) Konstruiere f durch

```
N=1024;x=(0:N-1)*2*pi/N;f=0*x;f(500:540)=1;
```

Berechne die diskrete Faltung mit dem Kern k

```
k = 0*x; k(1:N/4)=1; k(N/2+2:end) = k(N/2:-1:2).
```

Rekonstruiere f aus ungestörten Daten $g := Af$ und dann aus den gestörten Daten

```
gDelta = g + randn(size(g))*.01;
```

zuerst direkt mit Hilfe der verallgemeinerten Inversen und dann mit Hilfe der TSVD (d.h. vier Rekonstruktionen!). Welchen Wert für α hast Du in der TSVD gewählt? Wieso? Plotte $f, g, g^\delta, A^\dagger g, T_\alpha g^\delta$.

e) Führe alle Schritte des obigen Unterpunktes auch für den Kern

```
k = 0*x; k=exp(-300*x.^2); k(N/2+2:end) = k(N/2:-1:2);
```

aus. Vergleiche die Ergebnisse und erkläre die Unterschiede.