Zentrum für Technomathematik

Inverse Probleme
WS 2010/2011
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ws10/

Übungsblatt Nr. 3

Abgabe Freitag, 19.11.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Abgeschlossenheit] 4 Punkte

Sei $A : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator zwischen zwei Hilberträumen X und Y. Zeige:

a) $\mathcal{N}(A) = \overline{\mathcal{N}(A)}$, d.h. $\mathcal{N}(A)$ ist abgeschlossen.
Hinweis: Um zu zeigen, dass M in X abgeschlossen ist, benutze folgendes Kriterium: M ist abgeschlossen falls aus $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x$ in X folgt, dass $x \in M$.

b) $\mathrm{rg}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ und $\mathrm{rg}(A^*)^\perp = \mathcal{N}(A)$, wobei
$M^\perp = \{x \in X \mid \langle x, m\rangle = 0 \ \forall m \in M\}$ das Komplement eines linearen Raumes $M \subset X$ ist.

c) $\overline{\mathrm{rg}(A)} = \mathcal{N}(A^*)^\perp$ und $\overline{\mathrm{rg}(A^*)} = \mathcal{N}(A)^\perp$.

Aufgabe 2: [Orthogonalprojektion] 4 Punkte

Sei X ein Hilbertraum, $\emptyset \neq M \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum und (m_j) eine Orthonormalbasis von M. Der Operator $P : X \to X$ sei definiert durch

$$Px = \sum_j \langle x, m_j\rangle m_j.$$

Zeige, dass $\mathrm{rg}(P) = M$ gilt und dass P eine *Orthogonalprojektion* ist, d.h.

- P ist ein Projektionsoperator oder idempotenter Operator, d.h. $P^2 = P \circ P = P$ und
- P ist selbstadjungiert, d.h. $P^* = P$.

Man sagt dann, P ist die *Orthogonalprojektion auf* M. Zeige:

a) $Pm = m$ für alle $m \in M$,

b) $\mathrm{rg}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$, d.h. $\langle Px, y\rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $y \in \mathcal{N}(P)$,

c) $\|P\| = 1$,

d) $I - P$ ist die Orthogonalprojektion auf $M^\perp$.

Aufgabe 3: [Pseudoinverse - Theorie] 4 Punkte

Sei $A : X \to Y$ ein kompakter Operator zwischen den Hilberträumen X und Y mit Singulärwertzerlegung (u_j, v_j, σ_j). Die Pseudoinverse von A sei mit $A^\dagger : D(A^\dagger) = \mathrm{rg}(A) \oplus \mathrm{rg}(A)^\perp \to X$ bezeichnet. Zeige:

a) $AA^\dagger A = A$,

b) $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$,

c) $A^\dagger A = P_{\overline{\mathrm{rg}(A^*)}}$ und

d) $AA^\dagger = P_{\overline{\mathrm{rg}(A)}|D(A^\dagger)}$.

Dabei ist $P_{\overline{\mathrm{rg}(A^*)}}$ die Orthogonalprojektion auf $\overline{\mathrm{rg}(A^*)}$ und $P_{\overline{\mathrm{rg}(A)}|D(A^\dagger)}$ die Orthogonalprojektion auf $\overline{\mathrm{rg}(A)}$ eingeschränkt auf $D(A^\dagger)$.

Aufgabe 4: [Pseudoinverse - Praxis] 4 Punkte

Berechne die Pseudoinverse der folgenden Operatoren:

a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $A : \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots)$.

c) P aus Aufgabe 2.

Aufgabe 5, Programmierung: [Numerik des Integraloperators] 4 Punkte

Sei $\mathbf{A}$ der diskretisierte Integraloperator aus Aufgabe 4 des Blattes 2. Wähle wieder $f(x) = \exp(-2x)\cos(5x)$. Führe jeweils für $N = 10, 30, 100, 300, 1000, 3000$ folgende Schritte durch:

- Berechne die Kondition der Matrix A (Matlab: cond), d.h. das Verhältnis des größten Singulärwerts zum kleinsten. Erkläre das Verhalten.
- Berechne $\mathbf{g} = \mathbf{Af}$ und eine leicht verrauschte Version $\mathbf{g}^\delta$ von $\mathbf{g}$, indem Du punktweise normalverteiltes Rauschen mit Standardabweichung 0.0001 hinzuaddierest (Matlab: gdelta = g + 0.0001*randn(size(g))).
- Löse die Normalengleichungen

$$\mathbf{A}^*\mathbf{Af} = \mathbf{A}^*\mathbf{g} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{A}^*\mathbf{Af} = \mathbf{A}^*\mathbf{g}^\delta.$$

- Plotte $\mathbf{g}$ und $\mathbf{g}^\delta$ in ein Bild und die Funktion f und die beiden Lösungen der Normalengleichungen zusammen in ein weiteres Bild. Erkläre das Ergebnis.

(*) Aufgabe 6: [Faltungsoperator] 4 Punkte

Sei $L_2^{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \quad f \in L_2(\mathbb{R}) \quad \text{ist} \quad 2\pi\text{-periodisch} \quad \text{d.h. } f(x + 2\pi) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.
Für $f, g \in L_2^{2\pi}$ definieren wir ein Faltungsoperator A mit

$$Af = (f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y.$$

Berechnen Sie die Singulärewertzerlegung (SVD) für A.
Hinweis: Verwenden Sie den Faltungsatz.