



Inverse Probleme
WS 2010/2011
Dr. Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ws10/index.html

Übungsblatt Nr. 2

Abgabe Freitag, 12.11.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Spektrum, Eigenwert]

4 Punkte

Der Operator $A : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$ sei definiert durch

$$Af(t) = t \cdot f(t).$$

Zeige:

- A ist linear,
- $\|A\| = 1$,
- A besitzt keine Eigenwerte, doch
- $\sigma(A) = [0, 1]$.

Aufgabe 2: [Singulärwertzerlegung]

4 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Berechne

- die Eigenwerte von A ,
- die Singulärwertzerlegung von A und
- die (euklidische) Norm von A .

Aufgabe 3: [Kompakte Operatoren in Hilberträumen]

4 Punkte

Seien X und Y zwei Hilberträume. Ein linearer beschränkter Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $(x^n) \subset X$ die Folge $(Ax^n) \subset Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Als Beispiel betrachte den Folgenraum

$$\ell_2 = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

der quadratsummierbaren reellen Folgen mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

und den Operator $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definiert durch

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right).$$

Zeige:

- A ist kompakt.
- Der Bildraum $R(A)$ ist nicht abgeschlossen, d.h. es gibt eine Folge $(y^n) \subset R(A)$ mit $y^n \rightarrow y^0$ in ℓ^2 , aber $y^0 \notin R(A)$.

Aufgabe 4: [Integraloperator (Programmieraufgabe)]

4 Punkte

Sei $L_2(0, 1)$ der Raum der quadratintegribaren Funktionen auf $(0, 1)$. Darauf sei der lineare stetige Operator A definiert durch

$$A : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1),$$

$$f \mapsto Af \text{ mit } (Af)(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Der Operator A soll numerisch ausgewertet werden. Diskretisiere dazu das Intervall $(0, 1)$ auf dem Gitter $x_i = (i - \frac{1}{2})h$, $i = 1, \dots, N$ mit $h = 1/N$ und $N \in \mathbb{N}$. Die Funktion f werde durch eine stückweise konstante Treppenfunktion \bar{f} mit Werten $f_i = f(x_i)$ auf den Intervallen $[(i-1)h, ih)$ approximiert. Die Funktion Af werde durch den Vektor \mathbf{g} mit

$$g_i = (A\bar{f})(x_i) = \int_0^{x_i} \bar{f}(x) dx$$

approximiert. Zeige, dass \mathbf{g} gegeben ist durch die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Werte so Af numerisch für $f(x) = \exp(-2x) \cos(5x)$ und $N = 100$ aus. Plote \mathbf{f} und $\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f}$.

Aufgabe 5: [Programmieraufgabe]**

4 Punkte

- (a) [**Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition SVD)**] Implementieren Sie den Golub-Algorithmus zur Berechnung der Singulärwertzerlegung.

Literatur:

[1] Stoer, J., und Bulirsch, R.: Introduction to Numerical Analysis, 3rd ed. (New York: Springer), § 6.7, 2002.

[2] Press et al - Numerical Recipes - Webnote No.2 Rev. 1.

- (b) [**Randon Transformation**] Wie wird die Randon-Transformation in Matlab implementiert? Implementieren Sie ein schneller Algorithmus zur Berechnung der Randon-Transformation und ihrer Adjungierten A^* .

Literatur:

[1] William H. Press,: Discrete Radon transform has an exact, fast inverse and generalizes to operations other than sums along lines, Proc Natl Acad Sci U S A, 2006 December 19; 103(51): 19249-19254, doi: 10.1073/pnas.0609228103.

[2] Jürgen Beyerer und Fernando Puente León,: Die Radontransformation in der digitalen Bildverarbeitung.