



Zentrum für
Technomathematik

Inverse Probleme
WS 2010/2011
Dr. Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ws10/index.html

Übungsblatt Nr. 1

Abgabe Freitag, 05.11.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Differentiation]

4 Punkte

Es seien punktweise Messungen $\hat{f}(x)$ von $f(x), x \in \mathbb{R}$, gegeben mit Meßfehler

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Berechne das optimale h , so dass der worst-case Fehler bei der Approximation von $f'(x_0)$ durch die zentralen Differenzenquotienten

$$df(x_0) = \frac{\hat{f}(x_0 + h) - \hat{f}(x_0 - h)}{2h}$$

minimiert wird.

Aufgabe 2: [Radon-Transformation]

4 Punkte

a) Berechne die Radon-Transformation von der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \chi_{\overline{B}_2(0, r)}(x, y) := \begin{cases} 1 & \|(x, y)\|_2 \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Bestimme den Träger der Radon Transformation von

$$f(x) := \chi_{\overline{B}_2((1,1), r)} := \begin{cases} 1 & \|(x, y) - (1, 1)\|_2 \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $r = 2$ und $r \rightarrow 0$.

Aufgabe 3: [Differenzenquotient]

4 Punkte

Sei $\Delta_h s : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ der Differenzenquotient von s definiert als

$$(\Delta_h s)(t) := \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Zeigen Sie, dass:

- (a) Δ_h linear und stetig ist.
- (b*) Δ_h injektiv und surjektiv ist.