



Übungsblatt Nr. 4
Abgabe Mittwoch, 18.05.2011

Aufgabe 1: [FDFD Diskretisierung der Helmholtzgleichung mit PML] 20 Punkte

Wir betrachten ein quadratisches Gebiet der Gittergröße 200×200 Pixel auf dem wir eine diskrete Lösung der Helmholtzgleichung berechnen wollen. Wie in der Vorlesung besprochen können wir die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung durch das Einführen von PML Schichten simulieren die das Berechnungsgebiet umgeben. Die zugehörigen Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u(z, x) = -\delta((z, x) - (z_0, x_0)), \quad (z, x) \in D \quad (1)$$

$$c(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(c(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + c(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + k^2 u(z, x) = 0, \quad (z, x) \in \text{PML}, \quad (2)$$

$$u(z, x) = 0, \quad (z, x) \in \partial\text{PML}, \quad (3)$$

wobei ∂PML den äusseren Rand der PML bezeichnet. In diesem Ausdruck ist

$$c(t) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 \omega}{\epsilon_0 \omega + i s(t)} & t \text{ in Normalenrichtung zum PML} \\ 1 & \text{anderenfalls.} \end{cases} \quad (4)$$

t ist hier der Abstand in Normalenrichtung im Punkt (z, x) zur Grenzfläche zwischen D und dem PML, und t ist entweder z oder x . Desweiteren ist

$$s(t) = s_f \left(\frac{|t|}{hN} \right)^p. \quad (5)$$

Hier ist h die Gitterkonstante (Abstand zwischen zwei Gitterpunkten), N die gewählte Anzahl von PML Schichten, p ein geeignet zu wählender Exponent und s_f ein geeignet zu wählender Vorfaktor. Die Eigenschaften des PML hängen entscheidend von der Wahl der drei Parameter N , s_f und p ab. Das Ziel ist diese Parameter so zu wählen dass Reflexionen an der Grenzfläche zum PML in alle Richtungen und für alle Frequenzen minimiert werden.

Typische Werte die empirisch als brauchbar ermittelt wurden sind z.B.: $N = 10$, $s_f = 5.0$, $p = 2.0$.

- (10 Punkte) Implementiere das System (1)-(3) für $N = 0$, das heisst, ohne PML Schichten und mit Dirichlet Randbedingung. Vergleiche die dadurch berechnete Lösung mit der entsprechend analytisch berechneten Green'schen Funktion (siehe Aufgabenblatt 3).
- (5 Punkte) Die MATLAB Funktion *NIPcode03a* berechnet die Lösung des Systems (1)-(3) für ein quadratisches (Voreinstellung: 200×200) Gitter. Die physikalischen Werte sind für die Situation der Mikrowellentomographie voreingestellt, können aber leicht im Programm geändert werden. Bei Ausführen des Programmes werden Sie zur Eingabe der Parameter N , s_f und p aufgefordert, sowie zur Angabe der Zeile auf welcher Sie den resultierenden Datenfehler (hier die 2-Norm des Realteils der Abweichung zur Green'schen Funktion entlang

der entsprechenden Zeile) berechnen möchten. Machen Sie sich mit dem Programm vertraut und versuchen Sie durch wiederholte manuelle Variation der Parameter s_f und p bei festem $N = 10$ die Werte zu bestimmen welche den Datenfehler entlang einer von Ihnen fest ausgewählten Zeile minimieren (z.B. Zeile 105).

- c) (5 Punkte) Untersuche für die jetzt festen Werte p und s_f (wähle die optimalen Werte aus der obigen Teilaufgabe) die Abhängigkeit des Datenfehlers auf derselben Zeile wie zuvor von der Anzahl der PML-Schichten N .