Zentrum für Technomathematik

Nichtlineare Inverse Probleme

SS 2011

Oliver Dorn

Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ss11/

Übungsblatt Nr. 3

Abgabe Mittwoch, 11.05.2011

Aufgabe 1: [Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung in 2D] 20 Punkte

Die Green'sche Funktion für die Helmholtzgleichung in einem dielektrischen Medium in 2D is gegeben durch

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) \; = \; \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|), \tag{1}$$

wobei $H_0^{(1)}$ die Hankel-Funktion erster Art von Ordnung 0 ist und

$$k_0 \; = \; \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}. \tag{2}$$

i ist die imaginäre Einheit. Wir nehmen vereinfachend verschwindende Leitfähigkeit an $\sigma = 0$. In der folgenden Aufgabe wollen wir zwei Situationen untersuchen.

Die erste Situation behandelt die *geophysikalische Tomographie*, in der wir schematisch ein quadratisches Gebiet der Grösse 100×100 m^2 betrachten. Typische Werte für ϵ, μ und f sind hier

$$\epsilon = 10\epsilon_0, \quad \mu = \mu_0, \quad f = 10^6 - 10^7 [\mathrm{s}^{-1}].$$

Die zweite Situation untersucht die *medizinische Mikrowellen-Tomographie*, in der wir schematisch ein quadratisches Gebiet der Grösse 10×10 cm^2 betrachten. Typische Werte für ϵ, μ und f sind hier

$$\epsilon = 10\epsilon_0, \quad \mu = \mu_0, \quad f = 10^9 - 10^{10} [\mathrm{s}^{-1}].$$

Darüberhinaus ist $\omega = 2\pi f$, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Hm^{-1}, wie in der Vorlesung angegeben.

Führe die folgenden Schritte simultan für diese beiden Situationen durch.

a) (6 Punkte) Schreibe ein MATLAB Programm welches $G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ innerhalb eines quadratischen Gebietes D für ein festes aber beliebiges $\mathbf{x}_0 \in D$ berechnet. Benutze dafür eine hinreichend feine Diskretisierung des Gebietes, z.B. ein 200×200 Gitter. Die Grösse des Gebiets ist wie oben für die jeweiligen Situationen angegeben.

b) (2 Punkte) Visualisiere den Realteil und den Imaginärteil von $G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ mittels des MATLAB Kommandos *imagesc*.

c) (2 Punkte) Visualisiere mit dem MATLAB Kommando *plot* den Verlauf des Realteils und des Imaginärteils entlang einer Geraden die die Quellposition $\mathbf{x}_0$ enthält.

d) (6 Punkte) Die Wellenlänge sei definiert als der Abstand zweier gleichgerichteter Nulldurchgänge entlang der obigen Geraden. Schreibe ein kleines Programm welches diese Nulldurchgänge von Realteil und Imaginärteil entlang der oben genannten Geraden ausgibt. Basierend auf diesen Werten, berechne eine grobe Schätzung für die Wellenlänge in Realteil und Imaginärteil. Hängt dieser Wert von dem Abstand zu der Quelle $\mathbf{x}_0$ ab?

e) (4 Punkte) Vergleiche den geschätzten Wert mit dem folgenden theoretischen Wert, welcher sich durch die Formel

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \lambda_0, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$$

berechnet. Wie üblich ist hierbei $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ und $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$.

Tipp: Die Hankelfunktion hat in MATLAB die Darstellung *besselh(0,1,.)*. Versuche *help besselh* in MATLAB um eine Funktionsbeschreibung zu erhalten.