Zentrum für Technomathematik

Nichtlineare Inverse Probleme

SS 2011
Oliver Dorn
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ss11/

Übungsblatt Nr. 1
Abgabe Mittwoch, 20.04.2011

Aufgabe 1: [Tomographie] 4 Punkte

Ein Materialwissenschafter untersucht das folgende Objekt:

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Dabei nehmen wir an, dass die Einträge der Matrix für Dämpfungskoeffizienten stehen. Das Messmodel/ die Messmatrix A sei dasgleiche/ diegleiche wie in der Vorlesung (Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen), es gibt also zehn Messwerte. Unser Ziel ist es die Dämpfungskoeffizienten aus den Messungen zu rekonstruieren.

a) Berechne den Vektor der Messungen, d.h. bestimme $b = Ax$.

b) Bereche die MATLAB Lösung des Problems, d.h. $A\backslash b$.

c) Berechne die Moore-Penrose-Lösung $A^\dagger b$ und visualisiere diese. Tipp: `svd`, `reshape` und `imagesc`.

d) Vergleiche die Moore-Penrose-Lösung mit dem Original. Fällt Dir was auf? Was?

e) Existiert eine weitere (kleinste-Quadrate) Lösung des Problems, welche aus genau zwei Materialien mit ganzzahligen Dämpfungskoeffizienten besteht? Tipp: Suche ganzzahlige Vektoren im Kern des Problems.

Aufgabe 2: [Auflösungsvermögen] 4 Punkte

Es sei die Matrix R gegeben durch

$$R = A^\dagger A.$$

Dabei ist wieder $A^\dagger$, die Moore-Penrose-Inverse, definiert wie in der Vorlesung.
Wir erklären kurz die Bedeutung der Matrix: Jedes zu untersuchende Objekt lässt sich darstellen in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{16} x_i \cdot e_i,$$

wo

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, ..., e_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit sind dann die zugehörigen Daten gegeben durch $Ax = \sum x_i A e_i$ und die zugehörige Rekonstruktion gegeben durch $A^\dagger Ax = \sum x_i A^\dagger A e_i$. Idealerweise sollte also gelten $A^\dagger A e_i = e_i$. Allerdings ist bei (schlecht-gestellten) Inversen Problemen üblich, dass die Vektoren $A^\dagger A e_i$ nur geglättete Versionen von e_i sind. Damit bestimmen die Vektoren $A^\dagger A e_i$ die Auflösung der Rekonstruktion. Da diese Vektoren in R versammelt sind, nennt man R die Auflösungsmatrix des Problems A.

a) Bestimme die Matrix R zu dem Tomographieproblem der vorherigen Aufgabe.

b) Visualisiere die Vektoren $A^\dagger A e_i$.

c) Begründe ob und warum bei dem Tomographieproblem Information über das zu untersuchende Objekt verloren geht.

Aufgabe 3: [Tomographie, zum Dritten] 4 Punkte

Ein Geophysiker untersucht ein Gebiet zwischen zwei Bohnlöchern durch Laufzeitmessungen. Er unterteilt das Gebiet in ein 2×2-Feld, d.h.

$$x = \begin{bmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & s_4 \end{bmatrix}$$

und erhält folgende Messungen: Auf der oberen Zeile: 10; auf der unteren Zeile: 11; Auf der linken Spalte: 9; auf der rechten Spalte: 11; auf der Hauptdiagonale: 9; auf der anderen Gegendiagonale: 11.

a) Berechne die Moore-Penrose-Lösung dieses Problems.

b) Berechne die Auflösungsmatrix und interpretiere diese.

Aufgabe 4: [Regularization Toolbox] 4 Punkte

Die Regularization Toolbox ist erhältlich unter

http://www2.imm.dtu.dk/~pch/Regutools/

http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/52

a) Lade und installiere diese Toolbox.

b) Mache Dich mit dem Problem `tomo` vertraut und untersuche das Auflösungsverhalten.

(*) Aufgabe 5: [Magische Quadrate] 4 Punkte

Bestimme alle magischen Quadrate der Größe 4×4.