Warum ist Af eine Art Integraloperator?

1.) Wir starten mit der Definition eines Raumes Z:

$$Z := \{ f : f, f', f'' \in L^2(0,1) \;\&\; f'(0) = f'(1) = 0 \}$$

und eines Operators $D : Z \to Z$

$$Df = f''$$

Dann ist dieser Operator (formal) <u>selbstadjungiert</u>, d.h.

$$\langle Df, g \rangle = \langle f, Dg \rangle$$

2.) Die Funktionen u_n aus der Menge

$$\{ \overset{u_0}{1}, \overset{u_1}{\sqrt{2} \cos(\pi x)}, \overset{u_2}{\sqrt{2} \cos(2\pi x)}, \dots \}$$

- bilden eine <u>ONB</u> von Z
- sind <u>Eigenfunktionen</u> von D, denn

$$D u_n = -\pi^2 n^2 u_n$$

3.) Damit ist $\langle Df, u_n \rangle = \langle f, -\pi n^2 u_n \rangle = -\pi^2 n^2 \langle f, u_n \rangle$

$$B(Df) \cancel{} := \sum \frac{1}{n^2} \langle Df, u_n \rangle = -\pi^2 \sum \langle f, u_n \rangle \underset{u_n \text{ ONB}}{=} -\pi^2 f = -\pi^2 \text{"} \iint Df \text{"}$$

Der Operator B ist (bis auf Vorfaktor) ein <u>doppeltes</u> Integral, denn es transformiert Df auf f.

4.) Da $A(A\,Df) = B(Df)$ ist also A eine Art "Wurzel" von B; d.h. mit $g = Df$

$$Ag = i\pi \text{"} \int g \text{"}$$

und damit Integraloperator. (cs) Sturm Liouville Theory)