Zentrum für Technomathematik

Inverse Probleme
SS 2009
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ss09/

Übungsblatt Nr. 9

Abgabe Freitag, 26.06.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Fouriertransformation] 4 Punkte

Wir betrachten den Raum L^2 der komplexwertigen quadratintegrablen 1-periodischen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle g, f \rangle = \int_0^1 \overline{g(x)} \cdot f(x)\, dx.$$

Für $f \in L^2$ ist die Fouriertransformierte $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\widehat{f}(l) := \int_0^1 e^{-2\pi i l x} f(x)\, dx.$$

Zeige:

a) Faltungssatz: $\widehat{f * k} = \widehat{f} \cdot \widehat{k}$, wobei $(f * k)(x) = \int_0^1 f(y) \cdot k(x-y)\, dy$.

b) Differentiation: Ist $f, f' \in L^2$, so ist $\widehat{f'}(l) = 2\pi i l \widehat{f}(l)$.

c) Inversion: Wie sieht die Inverse der Fourier-Transformation aus? Tipp: $e^{-2\pi i l x}$ genauer angucken.

Aufgabe 2: [Diskrete Fourier-Transformation] 4 Punkte

Seien $f, k \in \mathbb{C}^N$ komplexwertige Vektoren. Die diskrete Fouriertransformation $\hat{f}$ von f ist gegeben durch

$$\hat{f}_l = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i n l/N}, \quad l = 0, \ldots, N-1$$

Zeige:

a) Inversion: $f_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l e^{2\pi i n l/N}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$

b) Faltungssatz: $(\widehat{f * k})_l = \hat{f}_l \cdot \hat{k}_l$, wobei $(f * k)_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m k_{n-m}$.

c*) Ist es sinnvoll die diskrete Fourier-Transformation als eine Diskretisierung der Fourier-Transformation aus Aufgabe 1 aufzufassen? Begründe deine Antwort.

d*) Wie sieht die Differentiationsformel aus Aufgabe 1 für die diskrete Fourier-Transformation aus?

Stelle dir wo nötig f und k periodisch auf $\mathbb{Z}$ fortgesetzt vor, d.h. z.B. $f_{n+mN} := f_n$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3, Programmierung: [Diskretisierungen der Faltung] 4 Punkte

Wir betrachten zuerst den Faltungsoperator auf ganz $\mathbb{R}$ definiert durch

$$Af(x) := (k * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)k(x-y)\,dy.$$

a) Wähle X und Y sinnvoll, so dass $A : X \to Y$ wohl-definiert ist.

b) Implementiere A mit sparsen Matrizen. (Wie behandelst du Randeffekte? Begründe deinen Ansatz?)

c) Bestimme und implementiere A^*.

Weiter betrachten wir den Faltungsoperator aus Aufgabe 1

$$Bf(y) = (f * k)(x) = \int_0^1 f(y) \cdot k(x-y)\,dy$$

a) Wähle Y sinnvoll, so dass $B : L^2 \to Y$ wohl-definiert ist.

b) Implementiere B mit der diskreten Fourier-Transformation. (Wie behandelst du Randeffekte? Begründe deinen Ansatz?) Tipp: `doc fft`.

c) Bestimme und implementiere B^*.