Übungsblatt Nr. 8

Abgabe Freitag, 19.06.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Konvergenz der duale Fehlerquadratmethode] 4 Punkte

Die duale Fehlerquadratmethode konvergiert unter viel milderen Voraussetzungen als die Fehlerquadratmethode. Wir wollen zeigen, dass unter den Voraussetzungen von Aufgabe 3 des letzten Blattes die duale Fehlerquadratmethode bereits unter der Zusatzbedingung

$$\overline{\cup_{l\in\mathbb{N}} Y_l} = Y$$

konvergiert. Dazu zeigen wir, dass

$$\|A_l^\dagger Q_l A\| \leq 1$$

gilt. Die andere Bedingung, dass $\lim_{l\to\infty} P_{\mathcal{N}(A_l)} x = 0$ für alle $x \in \mathcal{N}(A)^\perp$, ist ebenfalls erfüllt, soll aber hier nicht gezeigt werden. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeige: $\mathcal{N}(Q_l A) = X_l^\perp$.

b) Folgere durch Aufspaltung von $x = P_l x + (I - P_l)x$, dass $A_l^\dagger Q_l A = A_l^\dagger A_l$ gilt.

c) Zeige: $X_l = \mathcal{N}(A_l)^\perp$.

d) Folgere schließlich, dass $A_l^\dagger A_l = P_l$ und $\|A_l^\dagger Q_l A\| \leq 1$.

Zur Erinnerung: Es gilt $A_l^\dagger A_l = P_{\mathcal{N}(A_l)^\perp}$.

Aufgabe 2: [Vertauschen von Summation und Grenzwert] 4 Punkte

a) Sei (c^l) mit $c^l = (c_1^l, c_2^l, \ldots)$ eine Folge von ℓ^2-Folgen, für die gilt:

- $\lim_{l\to\infty} c_n^l = c_n^0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (punktweise Konvergenz) und
- $|c_n^l| \leq m_n$ für alle $n, l \in \mathbb{N}$ mit $m = (m_1, m_2, \ldots) \in \ell^2$ (gleichmäßige Beschränktheit).

Zeige: Dann ist $c^0 = (c_1^0, c_2^0, \ldots) \in \ell^2$ und es gilt

$$\lim_{l\to\infty} c^l = c^0 \text{ in } \ell^2, \quad \text{insbesondere auch} \quad \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^\infty |c_n^l|^2 = \sum_{n=1}^\infty \lim_{l\to\infty} |c_n^l|^2 = \sum_{n=1}^\infty |c_n^0|^2.$$

b) Sei Y ein Hilbertraum, $g \in Y$ und (v_n) ein Orthonormalsystem in Y. Sei (γ^l) mit $\gamma^l = (\gamma_1^l, \gamma_2^l, \ldots)$ eine beliebige Folge von Folgen mit $\lim_{l\to\infty} \gamma_n^l = \gamma_n^0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $|\gamma_n^l| \leq M$ für alle $n, l \in \mathbb{N}$ mit $M > 0$. Folger aus Teil a): Dann gilt

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^\infty |\gamma_n^l|^2 |\langle g, v_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^\infty \lim_{l\to\infty} |\gamma_n^l|^2 |\langle g, v_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\gamma_n^0|^2 |\langle g, v_n\rangle|^2.$$

*c) Konstruiere ein Gegenbeispiel für a), wo die gleichmäßige Beschränktheit nicht gegeben ist und daher Summation und Grenzwert nicht vertauscht werden können.

Aufgabe 3, Programmierung: [Programmieraufgabe] 4 Punkte

Wir führen die Programmieraufgabe des letzten Übungsblattes weiter. Sei aber diesmal $f(x) = x(1-x)$. Wie sieht $g = Af$ aus? Zeige: Ist g^δ eine Version von g, welche mit gleichverteiltem Rauschen welches zwischen $-\delta$ und δ liegt verrauscht wurde, so gilt

$$\|g^\delta - g\|_2 \leq \delta.$$

Erzeuge g^δ für $\delta = 10^0, ..., 10^{-6}$ und bestimme optimale Werte für l nach

a) Augenmaß

b) L-Kurvenkriterium

c) Morozov

Für $f^\dagger \in H^2$ mit $\|f^\dagger\| \leq \rho$ gilt

$$\|Q_h g^\delta - f^\dagger\| \leq c \cdot h^2 \cdot \rho + c \cdot h^{-1}\delta.$$

Ist diese Abschätzung für f anwendbar? Wie sieht der Zusammenhang zwischen l und h aus? Bestimme aus der obigen Unglichung eine ordnungsoptimale Paramterwahl für l. Teste diese ebenfalls für g^δ mit $\delta = 10^0, ..., 10^{-6}$.