Zentrum für Technomathematik

Inverse Probleme
SS 2009
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ss09/

Übungsblatt Nr. 7

Abgabe Freitag, 12.06.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Fehlerquadratemethode für den Integraloperator] 4 Punkte

Sei A der Integraloperator $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, mit $(Af)(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$. Für festes $l \in \mathbb{N}$ definieren wir die stückweise konstanten Funktionen

$$\varphi_{l,i} := \chi_{[x_i, x_{i+1})}$$

mit $x_i = ih$, $h = \frac{1}{l}$, $i = 0, \ldots, l$ sowie den Raum X_l welcher durch die Basis $\Phi_l := (\varphi_{l,0}, \ldots, \varphi_{l,l-1})$ aufgespannt wird.

a) Berechne die Bildfunktionen $\psi_{l,i} = A\varphi_{l,i}$ und weise nach, dass die Dimension des Raumes $Y_l = \mathrm{span}(\Psi_l)$ gleich l ist, wobei $\Psi_l := (\psi_{l,0}, \ldots, \psi_{l,l-1})$.

b) Zeige, dass die Lösung der Aufgabe

$$\min\{\|Af_l - g\|_2^2 \ : \ f_l \in X_l\}$$

Gegeben ist durch $f_l = \sum_{i=0}^{l-1} \xi_l^i \cdot \varphi_{l,i}$, wobei der Vektor ξ_l die Lösung von

$$\mathbb{A}_l \xi_l = q_l(g)$$

mit $(\mathbb{A}_l)_{i,j} = \langle \psi_{l,i}, \psi_{l,j} \rangle \quad$ und $\quad q_l(g)_i = \langle \psi_{l,i}, g \rangle$ ist.

c) Gib $\mathbb{A}_l$ explizit an.

Aufgabe 2: [Kollokation und Ritz-Verfahren] 4 Punkte

Sei $X = Y = L_2(0,1)$ und $A : X \to Y$ ein selbstadjungierter, positiv definiter, invertierbarer Operator. Für festes $l \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $\varphi_{l,i}$ gewählt wie in der letzten Aufgabe, weiter seien $\psi_{l,i} := \varphi_{l,i}$. Die Funktion f_l ist die Lösung des Ritz-Verfahrens, wenn

$$\langle \psi_{l,i}, Af_l \rangle = \langle \psi_{l,i}, g \rangle \qquad i = 0, \ldots, l-1$$

gilt.

Wie muss das Skalarprodukt $\langle \psi_{l,i}, Af_l \rangle$ diskretisiert werden, damit f_l mit der Lösung des Kollokations-Verfahrens zu den Stellen $x_{l,i} = ih$, $h = \frac{1}{l}$, $i = 0, \ldots, l-1$ übereinstimmt?

Aufgabe 3: [Duale Fehlerquadratmethode] 4 Punkte

Sei $A : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator zwischen den reellen Hilberträumen X und Y und $g \in Y$. Die duale Fehlerquadratmethode ist ein Projektionsverfahren, bei dem man eine Basis $\Psi_l = \{\psi_{l,1}, \ldots, \psi_{l,m_l}\}$ von Y_l wählt und $X_l = A^* Y_l$ setzt. Die Basis Ψ_l sei so gewählt, dass $Y_l \subset \mathcal{N}(A^*)^\perp$ gilt. Dann bilden die Funktionen $\varphi_{l,i} = A^* \psi_{l,i}$ eine Basis von X_l. Sei $A_l = Q_l A P_l$ mit den orthogonalen Projektionen P_l auf X_l und Q_l auf Y_l.

a) Zeige: $A_l = Q_l A$. **Hinweis:** Spalte $x \in X$ in Anteile in X_l und $X_l^\perp$ auf und zeige die Aussage erst für beide Teile getrennt.

b) Zeige, dass die Normalengleichung $A_l^* A_l f_l = A_l^* Q_l g$ zum Gleichungssystem

$$\mathbb{A}_l \xi_l = q_l(g)$$

führt, wobei ξ_l der Koordinatenvektor von f_l bzgl. $\varphi_{l,i}$ ist, d.h. $f_l = \sum_{i=1}^{m_l} (\xi_l)_i \varphi_{l,i}$, und

$$(\mathbb{A}_l)_{i,j} = \langle A^* \psi_{l,i}, A^* \psi_{l,j} \rangle \quad \text{und} \quad q_l(g)_i = \langle g, \psi_{l,i} \rangle.$$

Aufgabe 4, Programmierung: [Duale Fehlerquadratmethode] 4 Punkte

Wir wollen die Gleichung $Af = g$ mit dem Integraloperator

$$A : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \quad (Af)(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

mit Hilfe der Fehlerquadratmethode lösen. Dazu diskretisiere das Interval $[0,1]$ an den $l+1$ Stellen $x_i = ih$, $h = \frac{1}{l}$, $i = 0, \ldots, l$ und verwende die stückweise konstanten Funktionen $\psi_{l,i} := \chi_{[x_{i-1}, x_i)}$, $i = 1, \ldots, l$. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\mathbb{A}_l \xi_l = q_l(g) \quad \text{und es gilt} \quad (\mathbb{A}_l)_{i,j} = \begin{cases} (i - \frac{2}{3})h^3 & , i = j \\ (\min\{i,j\} - \frac{1}{2})h^3 & , i \neq j. \end{cases}$$

für $i, j = 1, \ldots, l$. Zum Auswerten der rechten Seite $q_l(g)_i = \langle g, \psi_{l,i} \rangle$ diskretisiere das Intervall $[0,1]$ äquidistant an $N = 5000$ Stellen und benutze die Trapezregel.

a) Für $g(x) = x(1-x)$ und $l = 20$ berechne Sie die Lösung $f_l = \sum_{i=1}^{l} (\xi_l)_i \varphi_{l,i}$. Hierfür benötigst du erst die Funktionen $\varphi_{l,i} = A^* \psi_{l,i}$. Plotte f_l zusammen mit der echten Lösung $f^\dagger$.

b) Verrausche g zu g^δ mit punktweise normalverteiltem Rauschen mit Standardabweichung 0.1 und wiederhole a).

c) Für $l = 1, 2, \ldots, 50$ berechne den relativen Fehler $\|f^\dagger - f_l\|_2 / \|f^\dagger\|_2$. Zur Auswertung der Norm kannst du wieder die Trapezregel verwenden. Plotte den Fehler über $1/l$. Bei welchem l wird der minimale Fehler erreicht?

d) Zum Vergleich wollen wir die Operatorgleichung *überdiskretisieren* und zusätzlich Tikhonov-Regularisierung verwenden. Hierbei ergibt sich das Gleichungssystem

$$(\mathbb{A}_l^2 + \alpha h I)\xi_l = \mathbb{A}_l q_l(g).$$

Verwende $l = 100$ und verschiedene α aus dem Intervall $[10^{-9}, 10^{-7}]$. Plotte den relativen Fehler gegen α. Bei welchem α wird der minimale Fehler erreicht? Vergleiche den minimalen relativen Fehler mit c).