Übungsblatt Nr. 4

Abgabe Freitag, 15.05.2009 vor der Vorlesung

Sei stets $g \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ und $A : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator zwischen den Hilberträumen X und Y mit SWZ (σ_n, u_n, v_n).

Aufgabe 1: [Operatoren] 4 Punkte

Zeige:

a) Für $0 \le \tau \le 1$ ist $\|(A^*A + \alpha I_X)^{-1}(A^*A)^\tau\| \le (1-\tau)^{1-\tau}\tau^\tau\alpha^{\tau-1}$, wobei $0^0 = 1$ gesetzt wird.

b) $A(A^*A + \alpha I_X)^{-1} = (AA^* + \alpha I_Y)^{-1}A$.

c) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$

d) $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$.

Aufgabe 2: [Projektion im Urbild] 4 Punkte

Sei

$$U_N := \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_N\}.$$

a) Wie sieht die zum Operator

$$T_N g := P_{U_N} A^\dagger g$$

zugehörige Filterfunktion aus? (P ist wieder die Orthogonalprojektion)

b) Zeige, dass mit $\alpha := 1/N$ gilt für die Filterfunktion von T_N gilt:

$$\begin{aligned} \sup |F_\alpha(\sigma_n)\sigma_n^{-1}| &= c(\alpha) < \infty, \\ \lim_{\alpha\to 0} F_\alpha(\sigma_n) &= 1 \qquad \text{punktweise in } \sigma_n, \\ |F_\alpha(\sigma_n)| &\le c \qquad \forall \alpha, \sigma_n. \end{aligned}$$

c) Ist das Verfahren sinnvoll?

Aufgabe 3: [Landweber-Iteration] 4 Punkte

Sei

$$f_{n+1} := f_n + \omega A^*(g - Af_n) \qquad f_0 = 0.$$

a) Zeige, dass gilt

$$T_N g := f_N = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (1 - \omega\sigma_n^2)^N)\sigma_n^{-1}\langle g, v_n\rangle u_n.$$

Tipp: Geometrische-Reihe.

b) Zeige, dass für $\alpha := 1/N$ und $0 < \omega < 2/\|A\|^2$ die Eigenschaften aus Aufgabe 2b) auch für die Filterfunktion von T_N gelten.

Aufgabe 4, Programmierung: [Integraloperators] 4 Punkte

Sei $\mathbf{A}$ der diskretisierte Integraloperator aus Aufgabe 4 des Blattes 2.

- Implementiere die Abgeschnittene Singulärwertzerlegungn (TSVD) und die zwei oben stehenden Verfahren.
- Berechne unter Verwendung deiner Implementierungen ein möglichst genaues Urbild zu den gestörten Daten g^δ, wobei `norm(`$g - g^\delta$`)`≤ 0.19.