Zentrum für Technomathematik

Inverse Probleme
SS 2009
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ss09/

Übungsblatt Nr. 2

Abgabe Freitag, 24.04.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Spektrum, Eigenwert] 4 Punkte

Der Operator $A : C(0,1) \to C(0,1)$ sei definiert durch

$$Af(t) = t \cdot f(t).$$

Zeige:

a) A ist linear,

b) $\|A\| = 1$,

c) A besitzt keine Eigenwerte, doch

d) $\sigma(A) = [0,1]$.

Aufgabe 2: [Singulärwertzerlegung] 4 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Berechne

a) die Eigenwerte von A,

b) die Singulärwertzerlegung von A und

c) die (euklidische) Norm von A.

Aufgabe 3: [Kompakte Operatoren in Hilberträumen] 4 Punkte

Seien X und Y zwei Hilberträume. Ein linearer beschränkter Operator $A : X \to Y$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $(x^n) \subset X$ die Folge $(Ax^n) \subset Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Als Beispiel betrachte den Folgenraum

$$\ell^2 = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

der quadratsummierbaren reellen Folgen mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

und den Operator $A : \ell^2 \to \ell^2$ definiert durch

$$Ax = \Big(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\Big)\,.$$

Zeige:

a) A ist kompakt.

b) Der Bildraum $R(A)$ ist nicht abgeschlossen, d.h. es gibt eine Folge $(y^n) \subset R(A)$ mit $y^n \to y^0$ in ℓ^2, aber $y^0 \notin R(A)$.

Aufgabe 4: [Integraloperator (Programmieraufgabe)] 4 Punkte

Sei $L_2(0,1)$ der Raum der quadratintegrablen Funktionen auf $(0,1)$. Darauf sei der lineare stetige Operator A definiert durch

$$\begin{aligned} A : L_2(0,1) &\to L_2(0,1), \\ f &\mapsto Af \text{ mit } (Af)(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Der Operator A soll numerisch ausgewertet werden. Diskretisiere dazu das Intervall $(0,1)$ auf dem Gitter $x_i = (i - \frac{1}{2})h$, $i = 1, \dots, N$ mit $h = 1/N$ und $N \in \mathbb{N}$. Die Funktion f werde durch eine stückweise konstante Treppenfunktion $\bar{f}$ mit Werten $f_i = f(x_i)$ auf den Intervallen $[(i-1)h, ih)$ approximiert. Die Funktion Af werde durch den Vektor $\mathbf{g}$ mit

$$g_i = (A\bar{f})(x_i) = \int_0^{x_i} \bar{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

approximiert. Zeige, dass $\mathbf{g}$ gegeben ist durch die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = h\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Werte so Af numerisch für $f(x) = \exp(-2x)\cos(5x)$ und $N = 100$ aus. Plotte $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f}$.