Zentrum für Technomathematik

Inverse Probleme
SS 2009
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/inverse_probleme_ss09/

Übungsblatt Nr. 1

Abgabe Freitag, 17.04.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Differentiation] 4 Punkte

Es seien punktweise Messungen $\hat{f}(x)$ von $f(x)$,$x \in \mathbb{R}$, gegeben mit Meßfehler

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Berechne das optimale h, so dass der worst-case Fehler bei der Approximation von $f'(x_0)$ durch die zentralen Differenzenquotienten

$$df(x_0) = \frac{\hat{f}(x_0 + h) - \hat{f}(x_0 - h)}{2h}$$

minimiert wird.

Aufgabe 2: [Radon-Transformation] 4 Punkte

a) Berechne die Radon-Transformation von der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \chi_{\overline{B}_2(0,r)}(x,y) := \begin{cases} 1 & \|(x,y)\|_2 \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Bestimme den Träger der Radon Transformation von

$$f(x) := \chi_{\overline{B}_2((1,1),r)} := \begin{cases} 1 & \|(x,y) - (1,1)\|_2 \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $r = 2$ und $r \to 0$.

Aufgabe 3: [Truncated SVD] 4 Punkte

Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L_2([0,1])$. Wir definieren $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ durch

$$Af := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\langle f, u_n\rangle u_n$$

und wählen ein $f^\dagger \in L_2([0,1])$ so, dass

$$R(N) := \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle f^\dagger, u_n\rangle|^2} = c \cdot N^{-2} \qquad \text{mit} \quad 0 < c < \infty.$$

Weiter sei $g^\dagger$ definiert durch $g^\dagger := Af^\dagger$ und $g^\delta \in L_2([0,1])$ so gewählt, dass $\|g^\delta - g^\dagger\|_{L_2([0,1])} \leq \delta$. Zuletzt sei $T_N : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ definiert durch

$$T_N f := \sum_{n=1}^{N} n\langle f, u_n\rangle u_n.$$

Zeige:

a) $\|f^\dagger - T_N g^\dagger\| \leq R(N)$

b) $\|T_N g^\dagger - T_N g^\delta\| \leq \delta \cdot N$ (Tipp: Nicht zu früh die Abschätzung $\|g^\delta - g^\dagger\|_{L_2([0,1])} \leq \delta$ benutzen.)

c) Bestimme ein $N = N(\delta)$, do dass

$$\|f^\dagger - T_N g^\delta\| \leq \|f^\dagger - T_N g^\dagger\| + \|T_N g^\dagger - T_N g^\delta\|$$

minimal wird.