1 Analyse von gestoerten Daten

1.1 Problemstellung

Gegeben ist ein gestoerter Differenzenquotient

$$\frac{s^\delta(t+\Delta t) - s^\delta(t)}{\Delta t} =: v^\delta_{\Delta t}(t)$$

mit $s^\delta(t+\Delta t) = s(t+\Delta t) + \delta_1$ und $s^\delta(t) = s(t) + \delta_2$, wobei $|\delta_1|, |\delta_2| \leq \delta$.

Gesucht ist das Δt bei bekanntem δ, fuer welches der oben gegebene Differenzenquotient minimiert wird. Mit Taylorentwicklung und weiteren Abschaetzungen erhaelt man:

$$|\frac{s^\delta(t+\Delta t) - s^\delta(t)}{\Delta t}| \leq c\Delta t + \frac{2\delta}{\Delta t} =: e(\Delta t)$$

fuer pos. Δt, wobei $c = \sup\limits_{t \in D}(\frac{s^{(2)}(t)}{2})$.
Diese Abschaetzung wird minimiert von:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\delta}{c}}$$

Daraus folgt:

$$e(\delta) = 2\sqrt{2c\delta}$$

1.2 Beispiel

$s(t) = \sin(t), \quad D = [0, \frac{\pi}{2}]$ und somit $v(t) = \cos(t)$.

1.2.1 Plots

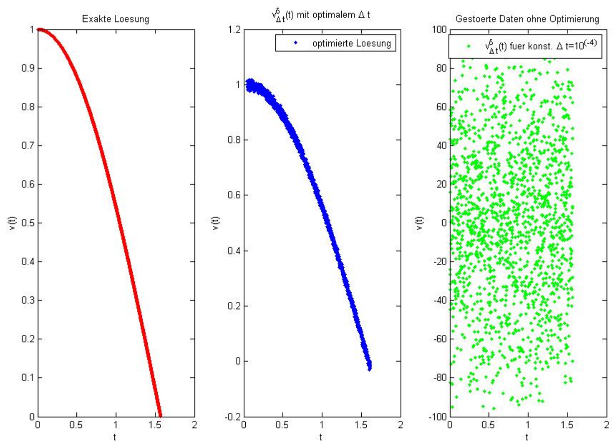

Abbildung 1: In dem ersten Plot wurde $v(t)$ fuer $t \in D$ aufgetragen. In dem zweiten Plot wurde $v^\delta_{\Delta t}(t)$ fuer optimiertes Δt und $t \in D$ aufgetragen. In dem dritten Plot wurde $v^\delta_{\Delta t}(t)$ fuer $\Delta t = 10^{-4}$ und $t \in D$ aufgetragen. Quelltext: vgl. Listing1

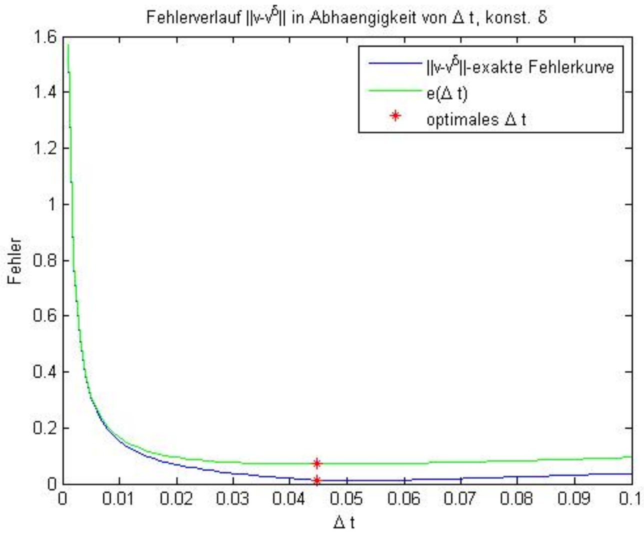

Abbildung 2: In diesem Plot wird der Fehler $|v - v^{\delta}_{\Delta t}|$ fuer $\Delta t \in (0, 0.1]$ mithilfe der L^1-Norm auf D betrachtet($\|f - g\| = \int |f - g| dt$). Der gruene Graph ist $\|v - v^{\delta}_{\Delta t}\|_{L^1} \leq \frac{\pi}{2} e(\Delta t)$. Der blaue Graph ist $\|v - v^{\delta}_{\Delta t}\|_{L^1} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x |v(x_i) - v^{\delta}_{\Delta t}(x_i)|$, wobei $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$ und $x_i = i\Delta x$. Quelltext: vgl. Listing2

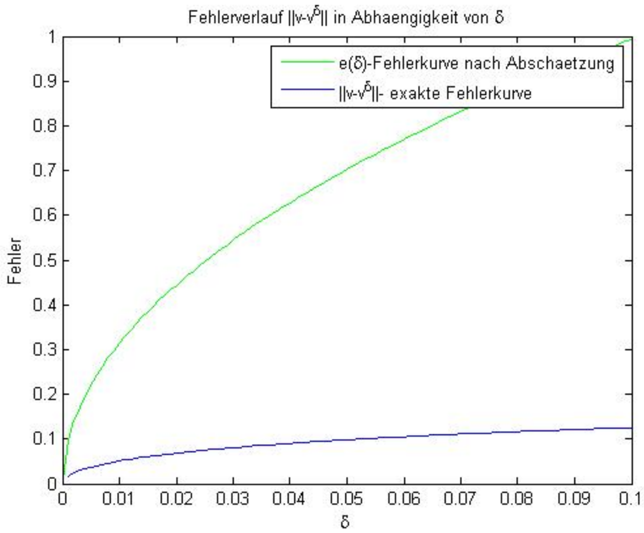

Abbildung 3: In diesem Plot wird der Fehler $|v - v^{\delta}_{\Delta t}|$ fuer optimales Δt und $\delta \in [0, 0.1]$ mithilfe der L^1-Norm auf D betrachtet. Der gruene Graph ist $\|v - v^{\delta}_{\Delta t}\|_{L^1} \leq \frac{\pi}{2} e(\delta)$. Der blaue Graph ist $\|v - v^{\delta}_{\Delta t}\|_{L^1} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x |v(x_i) - v^{\delta}_{\Delta t}(x_i)|$, wobei $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$ und $x_i = i\Delta x$. Quelltext: vgl. Listing3

1.2.2 Quelltexte

Listing 1: Figure(1)

```
%% Exemplarisches Beispiel fuer gestoerte Daten und deren Ableitung
%gestoerte Abstandsfunktion
sd=@(t,d)sin(t)+d;

%exakte Ableitung der Abstandsfunktion
v=@(t)cos(t);

%gestoerter Differenzenquotient
vd=@(t,dt,d1,d2)(sd(t+dt,d1)-sd(t,d2))/dt;
%c=sup(s''(t)/2) fuer t aus [0,pi/2]
c=0.5;

%Def.-Bereich
x=(0:0.001:pi/2)';

[n,m]=size(x);

%Stoerungen delta1
d1=(rand(n,1)-0.5)*10^(-3);
%stoerungen delta2
d2=(rand(n,1)-0.5)*10^(-3);

delta=max(abs([d1;d2]));

deltat=sqrt(2*delta/c);



b=zeros(n,3);


for i=1:n
    %exakte Kurve von v wird gespeichert
    b(i,1)=v(x(i,1));
    %Berechnung Kurve von v mit optimalem dt
    b(i,2)=vd(x(i,1),deltat,d1(i,1),d2(i,1));
    %Berechnung Kurve von v mit konst. sehr kleinem dt
    b(i,3)=vd(x(i,1),10^(-5),d1(i,1),d2(i,1));
end
figure(1)
subplot(1,3,1)
plot(x',b(:,1)','r.')
xlabel('t')
ylabel('v(t)')
title('Exakte Loesung')
subplot(1,3,2)
plot((x+deltat)',b(:,2)','b.')
legend('optimierte Loesung')
xlabel('t')
ylabel('v(t)')
```

```
title('v^{\delta}_{\Delta t}(t) mit optimalem \Delta t')
subplot(1,3,3)
plot((x+10^(-4))',b(:,3)','g.')
legend('v^{\delta}_{\Delta t}(t) fuer konst. \Delta t=10^{(-4)}')
xlabel('t')
ylabel('v(t)')
title('Gestoerte Daten ohne Optimierung')
```

Listing 2: Figure(2)

```
figure(2)

y=(0:0.001:0.1)';
[n,m]=size(y);
d=zeros(n,1);
e=zeros(n,1);
%Abgeschaetzte Fehlernorm
ex=@(dt)pi/2*(c*dt+2*delta/dt);
for i=1:n
    %Berechnung der Norm des exakten Fehlers
    d(i,1)=sumintfig2(y(i,1),delta,c,x,sd,v);
    %Berechnung der Norm des Fehlers nach der Abschaetzung nach oben
    e(i,1)=ex(y(i,1));
end

plot(y',d(:,1)','b',y',e(:,1)','g',[sqrt(2*delta/c) sqrt(2*delta/c)],[sumintfig2(sqrt(2*delta/c),delta,c,x,sd,v); ex(sqrt(2*delta/c))],'r*')
title('Fehlerverlauf ||v-v^{\delta}|| in Abhaengigkeit von \Delta t, konst. \delta')
legend('||v-v^{\delta}||-exakte Fehlerkurve','e(\Delta t)','optimales \Delta t')
xlabel('\Delta t')
ylabel('Fehler')


%% Darstellung des Fehlers in Abhaengigkeit von delta

 %Funktion fuer ||v-vd|| in Abhaengigkeit von delta
e=@(delta)pi*sqrt(c*2*delta);
xd=[0:0.001:0.1]';
[n,m]=size(xd);
yd=zeros(n,1);
zd=zeros(n,1);

for i=1:n
    %Berechnung des Integrals von der nach oben abgeschaetzten Funktion
    yd(i,1)=e(xd(i,1));
    %Berechnung des Integrals durch die Summe der einzelnen Funktionswerte
    zd(i,1)=sumint(xd(i,1),c,x,sd,v);
end
```

```
figure(3)
plot(xd',yd','g',xd',zd','b')
title('Fehlerverlauf ||v-v^{\delta}|| in Abhaengigkeit von \delta')
legend('e(\delta)-Fehlerkurve nach Abschaetzung','||v-v^{\delta}||- exakte Fehlerkurve')
xlabel('\delta')
ylabel('Fehler')
```

Listing 3: Figure(3)

```
%% Darstellung des Fehlers in Abhaengigkeit von delta

 %Funktion fuer ||v-vd|| in Abhaengigkeit von delta
e=@(delta)pi*sqrt(c*2*delta);
xd=[0:0.001:0.1]';
[n,m]=size(xd);
yd=zeros(n,1);
zd=zeros(n,1);

for i=1:n
    %Berechnung des Integrals von der nach oben abgeschaetzten Funktion
    yd(i,1)=e(xd(i,1));
    %Berechnung des Integrals durch die Summe der einzelnen Funktionswerte
    zd(i,1)=sumint(xd(i,1),c,x,sd,v);
end
figure(3)
plot(xd',yd','g',xd',zd','b')
title('Fehlerverlauf ||v-v^{\delta}|| in Abhaengigkeit von \delta')
legend('e(\delta)-Fehlerkurve nach Abschaetzung','||v-v^{\delta}||- exakte Fehlerkurve')
xlabel('\delta')
ylabel('Fehler')
```

Listing 4: sumintfig2.m

```
function error = sumintfig2( dt,delta ,c,x,sd,v)
                                            %Funktion zur Berechnung der
                                            %Summe der einzelnen
                                            %|v-vd|*deltax


vd=@(t,dt)(sd(t+dt,0)-sd(t,0)+2*delta)/dt;  %vdelta mit konstantem delta und var. dt

error=0;
[n,m]=size(x);
deltax=abs(max(x)-min(x))/n;                            %Schrittweite

```

```
for i=1:n
    error=error+abs(v(x(i,1))-vd(x(i,1),dt));
end
error=deltax*error;
```

Listing 5: sumint.m

```
function error = sumint( delta ,c,x,sd,v)
                                                    %Funktion zur Berechnung der
                                                    %Summe der einzelnen
                                                    %|v-vd|*deltax

vd=@(t,delta)(sd(t+sqrt(2*delta/c),0)-sd(t,0)+2*delta)/sqrt(2*delta/c); %vdelta mit konstantem delta und optimiert
error=0;
[n,m]=size(x);
deltax=abs(max(x)-min(x))/n;                                    %Schrittweite

for i=1:n
    error=error+abs(v(x(i,1))-vd(x(i,1),delta));
end
error=deltax*error;
```