Inverse Probleme und Bildverarbeitung
SS 2007
Prof. Peter Maaß
Dr. Dirk Lorenz
Dr. Lutz Justen
Kamil S. Kazimierski

Zentrum für Technomathematik

http://www.math.uni-bremen.de/zetem/studiengang/lehreSS07/bildverarb.html

Voraussetzungen für Schein:
Mindestens 60% der Punkte und Bearbeitung von $N-1$ Programmieraufgaben.

---

# Übungsblatt Nr. 9

Abgabe Mittwoch, 04.07.2007 in MZH 2330

**Aufgabe 1: [Morozov mal anders]** 4 Punkte

Betrachte $A \in L(X,Y)$ und seine Tikhonov-Regularisierung $T_\alpha = (A^*A+\alpha I)^{-1}A^*$. Zu gegebenen Daten $g^\delta$ bezeichne $f_\alpha^\delta = T_\alpha g^\delta$. Der Parameter $\alpha$ sei nach dem Morozovschen Diskrepanzprinzip bestimmt, bzw. es gelte sogar $\|Af_\alpha^\delta - g^\delta\| = \tau\delta$. Zeigen Sie

a) $f_\alpha^\delta$ löst das Minimierungsproblem

$$\min \|f\| \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \|Af - g^\delta\| = \tau\delta.$$

b) Ist $\|f_\alpha^\delta\| = M$, so löst $f_\alpha^\delta$ das Minimierungsproblem

$$\min \|Af - g^\delta\| \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \|f\| = M.$$

(Bemerkung: In Worten: $f_\alpha^\delta$ ist dasjenige $f$, mit kleinster Norm, welches $\|Af - g^\delta\| = \tau\delta$. erfüllt, bzw. dasjenige $f$ mit Norm $M$, welches die Diskrepanz $\|Af - g^\delta\|$ am kleinsten macht.)

**Aufgabe 2: [Keine $\delta^{1/2}$ Konvergenzrate für Morozov]** 4 Punkte

Es sei $A \in K(X,Y)$ mit Singulärwertzerlegung $(\sigma_n, u_n, v_n)$ und $T_\alpha = (A^*A+\alpha I)^{-1}A^*$. Es sei weiterhin $\delta_n = \sigma_n^2$ eine positive Nullfolge.
Definiere $g =: v_1$, $g_n := g + \delta_n v_n$ und $f^+ := A^+ g$. Es sei $\alpha_n$ der Regularisierungsparameter nach Morozov, d.h.

$$\|Af_{\alpha_n} g_n - g_n\| \le \tau\delta_n.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$\|T_{\alpha_n} g_n - f^+\| \ge \frac{\sqrt{\delta_n}}{1 + \frac{\alpha_n}{\delta_n}}.$$

b) Es gilt

$$\tau\delta \ge \frac{\alpha_n}{\sigma_1^2 + \alpha_n}.$$