Zentrum für Technomathematik

Analysis III
WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 12

Abgabe Dienstag, 03.02.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Majorisierte Konvergenz] 4 Punkte

Lässt sich die Aussage des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz erweitern? Es sei (f_n) eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen und (g_n) eine punktweise konvergente Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit

$$|f_n(x)| \leq g_n(x)$$

und

$$\int \lim_{n\to\infty} g_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda < \infty.$$

Zeige oder widerlege:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

Aufgabe 2: [Geht Riemann auch?] 4 Punkte

Analog zu Lebesgue-Integralen auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Riemann-Integrale auf ganz $\mathbb{R}$ folgendermaßen: Sei f so, dass die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f^+(x)\, dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f^-(x)\, dx$$

wohldefiniert und endlich sind. Wir nennen f Riemann-integrierbar (auf ganz $\mathbb{R}$) und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx := \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f^+(x)\, dx - \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f^-(x)\, dx$$

das Riemann-Integral der Funktion f. Weiter definieren wir für $1 \leq p < \infty$ die Riemann-p-Räume durch

$$\mathfrak{R}_p := \{ f \ : \ \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \}.$$

Zeige oder widerlege:

a) $\mathfrak{R}_p \subset \mathfrak{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R})$

b) $\mathfrak{R}_p \supset \mathfrak{L}_p(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R})$

c) $\mathfrak{R}_p$ ist vollständig bezüglich der Riemann-$\|\cdot\|_p$-Norm.

Aufgabe 3: [Räume $\mathfrak{L}_r(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R})$] 4 Punkte

a) Für $-\infty < \alpha < \infty$ seien die Funktionen $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_\alpha(x) := |\frac{\pi}{2} + x - \sin^2 x|^\alpha$. In welchen Räumen $\mathfrak{L}_r(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R})$ liegen die Funktionen

$$f_\alpha \qquad f_\alpha \cdot \chi_{[-1,1]} \qquad f_\alpha \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus]-1,1[}.$$

Gib für alle α alle zulässigen Werte von r an.

b) Zeige oder widerlege

$$\mathfrak{L}_1(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}_2(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R}), \qquad \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R}) \supset \mathfrak{L}_2(\mathbb{R}, \lambda_1, \mathbb{R}).$$

(*) Aufgabe 4: [Stetig fast überall] 4 Punkte

Zeige oder widerlege:

a) Ist f stetig und $g = f$ fast überall dann ist g fast überall stetig.

b) Ist f stetig fast überall, dann existiert eine stetige Funktion g, so dass $f = g$ fast überall.