Zentrum für Technomathematik

Analysis III
WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 11

Abgabe Dienstag, 27.01.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Konvergenzaussagen] 4 Punkte

Zeige oder widerlege:

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrierbar. Definiere

$$f_n(x) := f(x \cdot \chi_{[-n,n]}(x)) \cdot \chi_{[-n,n]}(f(x)).$$

Dann

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda_1 = \int f \, d\lambda_1.$$

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrierbar. Dann

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x) \cdot \exp(-|x|/n) \, d\lambda_1 = \int f \, d\lambda_1.$$

Aufgabe 2: [Andere Eigenschaften] 4 Punkte

Zeige oder widerlege:

a) Seien f und f_n Lebesgue integrierbare Funktionen (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \int f_n \, d\lambda_1 = 1.$$

Dann

$$\int f \, d\lambda_1 = 1.$$

b) Ist f integrierbar, dann

$$\limsup_{x\to\infty} |f(x)| = 0$$

c) Ist f meßbar, beschränkt und

$$\limsup_{x\to\infty} |f(x)| = 0$$

dann ist f auch integrierbar.

Aufgabe 3: [Lebesgue Integral in der Konvergenztheorie] 4 Punkte

Sei

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \qquad (\phi(0) := \infty).$$

Zeige oder widerlege: Die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j-|k|} \cdot \phi(x - \tfrac{k}{j})$$

konvergiert fast überall.