



Übungsblatt Nr. 10
Abgabe Dienstag, 20.01.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Messbare Funktionen]

4 Punkte

Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$A := \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}.$$

Zeige:

$$A \in \mathcal{L}_1.$$

Aufgabe 2: [Messbare Funktionen]

4 Punkte

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion für die der rechtsseitige Grenzwert $f(x+)$ für alle $x \in [a, b[$ und der linksseitige Grenzwert $f(x-)$ für alle $x \in]a, b]$ existiert. Zeige, dass f messbar ist.

Aufgabe 3: [Messbare Funktionen]

4 Punkte

Zeige oder widerlege:

a) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \sqrt{2} \cdot x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist messbar.

b) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

ist messbar.