Zentrum für Technomathematik

Analysis III

WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 9

Abgabe Dienstag, 06.01.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Translationsinvarianz] 4 Punkte

Zeige, dass das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist, d.h. für alle $A \subset \mathbb{R}^p$ und $a \in \mathbb{R}^p$ gilt

$$\lambda_p(A) = \lambda_p(A + a)$$

Aufgabe 2: [Meßbare Hülle] 4 Punkte

Zeige, dass jede Menge eine meßbare Hülle besitzt. Genauer: Zu jeder Menge $A \subset \mathbb{R}^p$ existiert eine Menge $H_A \subset \mathbb{R}^p$ mit

$$\begin{aligned} A &\subset H_A, \\ \lambda_p^*(A) &= \lambda_p(H_A) \quad \text{und} \\ \lambda_p(B) &= 0 \end{aligned}$$

für alle λ_p-meßbaren Mengen $B \subset H_A \setminus A$.

Aufgabe 3: [Vitali-Menge] 4 Punkte

Durch $a \sim b \;:\Leftrightarrow\; (a - b) \in \mathbb{Q}$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation erklärt. Nach dem Auswahlaxiom ist es möglich eine Menge $V \subset [0, 1]$ so zu wählen, dass sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ enthält. Zeige, dass V nicht meßbar bezüglich λ_1 ist.

(*) Aufgabe 4: [Nichtmeßbare Mengen] 4 Punkte

Zeige oder widerlege: Zu jedem $0 < r \leq 1$ existiert eine λ_1-nicht-meßbare Menge $V_r \subset [0,1]$ für die $\lambda_1^*(V_r) = r$ ist.

(*) Aufgabe 5: [Produktmaße] 4 Punkte

Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ ist das Produkt $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$A \times B := \{(a,b) \ : \ a \in A.b \in B\}.$$

Zeige oder widerlege:

a) Für zwei λ_1-meßbare Mengen A und B gilt

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda_1(A) \cdot \lambda_1(B).$$

b) Für zwei beliebige Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_2^*(A \times B) = \lambda_1^*(A) \cdot \lambda_1^*(B).$$