



Zentrum für  
Technomathematik

Analysis III  
WS 2008/09  
Prof. Peter Maaß  
Kamil S. Kazimierski

[http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis\\_iii/](http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/)

## Übungsblatt Nr. 8

Abgabe Dienstag, 16.12.2008 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1: [Äußere Maße]

4 Punkte

- a) Wir betrachten den Projektor auf die erste Komponente  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , der durch

$$p(x, y) = x \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben ist. Zeige, dass  $\mu^*$  definiert durch

$$\mu^*(A) := \lambda_1^*(p(A)), \quad A \subset \mathbb{R}^2,$$

ein äußeres Maß auf  $\mathbb{R}^2$  ist. Dabei ist  $\lambda_1^*$  das 1-dimensionale äußere Lebesgue-Maß.

- b) Es sei  $(\mu_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von äußeren Maßen auf  $X$ . Zeige, dass  $\mu^*$  mit

$$\mu^* := \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^*$$

ebenfalls ein äußeres Maß auf  $X$  ist.

### Aufgabe 2: [Eine Ungleichung]

4 Punkte

Es sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Zeige, dass

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*((A \cap (X \setminus B)) \cup (B \cap (X \setminus A)))$$

für alle  $\mu^*$ -messbaren Mengen  $A, B$ .

### Aufgabe 3: [Pandafutter]

4 Punkte

Nachdem die Pandas aus Blatt 4, Aufgabe 2 sich getroffen haben, fangen sie an das zu tun, was Panda-Bären am liebsten tun... fressen. Sie haben vor sich ein genau ein Meter langes Bambusstück. In der ersten Stunde fressen sie aus der Mitte des Stückes genau die Hälfte raus. In der zweiten Stunde fressen sie aus der Mitte der verbleibenden zwei Stücke jeweils ein Drittel raus. In der dritten Stunde fressen sie dann aus der Mitte der verbleibenden vier Stücke jeweils ein Viertel raus. In der vierten Stunde fressen sie dann aus der Mitte der verbleibenden acht Stücke jeweils ein Fünftel raus und so weiter und so fort. Schaffen Sie es jemals den Bambus ganz aufzuessen? Anders gefragt: Ist am Ende aller Zeit das äußere Lebesgue-Maß des übrig bleibenden Teils des Bambus Null? Natürlich kann angenommen werden, dass das Bambusstück einem Intervall entspricht und dass die von den Pandas ausgegagten Stücke offenen Intervallen entsprechen.