Analysis III
WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 7

Abgabe Dienstag, 09.12.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Death-Match] 4 Punkte

Welche Methode ist schneller für ein inhomogenes System von dem wir wenig wissen? Die Eigenwertmethode mit Variaton der Konstanten oder die Laplace-Transformation? Vergleiche selber! Betrachte das System

$$y'(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix} \cdot y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \exp(\alpha \cdot t) \qquad y(0) = 0.$$

a) Löse das System durch Variation der Konstanten.

b) Löse das System mit Hilfe der Laplace-Transformation.

c) Welche Methode sagt Dir mehr zu? Welche ist subjektiv einfacher? Begründe Deine Antwort.

d) Angenommen in der letzten Zeile der Inhomogenität stände $\cos(t^2)$ statt $\cos(t)$; würde die Aufgabe dadurch einfacher oder schwerer zu lösen? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 2: [Inhomogenes DGL System] 4 Punkte

Für das System aus Aufgabe 4 des Blattes 5 schreiben wir kurz

$$My'' + Cy = 0.$$

Weiter sei E der Einservektor $E := (1, 1, 1, 1, 1)^T$. Löse das Problem

$$My'' + Cy = E \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Aufgabe 3: [Verschwindende Integrale] 4 Punkte

Bei der Untersuchung der Laplace-Transformation spielt folgende Eigenschaft eine wichtige Rôle

$$\int_0^t u(s)\,ds = 0 \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq 1.$$

a) Zeige oder widerlege: Die Nullfunktion ist die einzige stetige Funktion mit dieser Eigenschaft.

b) Zeige oder widerlege: Die Funktion

$$u(s) := \begin{cases} 1 & \text{falls } s^{-1} \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt diese Eigenschaft.

Die Funktionen in dieser Aufgabe haben den Definitionsbereich $[0,1]$ und den Wertebereich $\mathbb{R}$.

(*) Aufgabe 4: [Asymptotik des Federsystems] 4 Punkte

Wir betrachten das Problem

$$My'' + Dy' + Cy = E \cdot (g + \cos(\omega \cdot t)) \qquad y(0) = y'(0) = 0 \quad g > 0.$$

mit $\omega \geq 0$, M, C, E wie in Aufgabe 2 und

$$D := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuche das asymptotische Verhalten der fünften Komponente der Lösung in Abhängigkeit von der Frequenz ω.