Zentrum für Technomathematik

Analysis III
WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 6

Abgabe Dienstag, 02.12.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Inhomogene DGL] 4 Punkte

a) Schreibe die Gleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}}, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

in ein DGL-System erster Ordnung um. Löse das homogene System mit der Eigenwertmethode. Bestimme eine spezielle Lösung mit der Variation der Konstanten.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x \cdot \exp(x), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

c) Löse die Gleichung

$$y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = \frac{\exp(2x)}{1 + \exp(x)}.$$

Aufgabe 2: [Laplace-Transformierte] 4 Punkte

Berechne die Laplace-Transformierten von

a) $f(t) = 1$,

b) $f(t) = \exp(a \cdot t)$,

c) $f(t) = \sin(t)^2$ und

d) $f(t) = \cos(t)^2$.

Aufgabe 3: [Bewegungsgleichung] 4 Punkte

Ein übliches Model in der Physik ist das sogenannte Punktteilchen. Dabei handelt es sich um ein Denkmodel eines Teilchens, das zwar eine Masse $m > 0$ aber keine räumliche Ausdehung besitzt, ein Punkt im Raum eben. Wir untersuchen wie sich das Teilchen bewegt, gesucht ist also für die Zeitvariable $t \geq 0$ die Funktion $t \mapsto x(t)$. Eine weitere wichtige Größe der Physik ist die Energie E. In der klassischen Mechanik gibt es zwei Energiearten. Die Erste ist die potentielle Energie (oder kurz Potential) $V(x)$, welche von Fall zu Fall verschieden ist. Die zweite Art ist die kinetische Energie T (Bewegungsenergie), welche in Übereinstimmung mit dem zweiten Newtonschen Axiom definiert ist als $T(x) := \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$. Weiter gilt üblicherweise die sogenannte Energieerhaltung, das heißt $E := T + V = const.$

a) Zeige, dass für das Potential

$$V(x) = mgx, \qquad m, g > 0$$

das Teilchen der folgenden Bewegungsgleichung

$$g + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

gehorchen muß und löse die Bewegungsgleichung.

b) Nach dem Gesetz von Stokes ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit, die Bewegungsgleichung mit Reibung ist also gegeben durch

$$g + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{d}{m} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 0, \qquad d > 0.$$

Löse auch diese Bewegungsgleichung.

(*) Aufgabe 4: [Teagers Energieoperator] 4 Punkte

In der Signalbearbeitung wird manchmal auch der Energieoperator Ψ nach Teager benutzt. Für ein Punktteilchen mit Bewegung $t \mapsto x(t)$ ist dieser definiert durch

$$\Psi(x) := \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Im Allgemeinen ist der so definierte Energiebegriff nicht erhaltend, es gilt also nicht $\Psi = const.$ Es gibt eine Klasse von Potentialen, so dass der Energieoperator Ψ für die Punktteilchen in diesem Potential doch energieerhaltend ist. Gib alle Elemente dieser Klasse an.