



Zentrum für
Technomathematik

Analysis III
WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 5

Abgabe Dienstag, 25.11.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Asymptotik]

4 Punkte

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung n -ter Ordnung:

$$y^{(n)} = a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y.$$

- Es existiert ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung, das genau die gleichen Lösungen hat wie die obige Differentialgleichung. Gib die Systemmatrix dieses Systems an.
- Gib das charakteristische Polynom dieser Matrix an.
- Zeige oder widerlege: Haben alle Eigenwerte der Systemmatrix aus a) einen negativen Realteil, so gilt für jede Lösung der Differentialgleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

- Zeige oder widerlege: Besitzt die Systemmatrix aus a) einen Eigenwert mit verschwindendem Realteil, und ist dieser Eigenwert nicht einfach, so existiert eine Lösung der Differentialgleichung, für die

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$$

gilt.

Aufgabe 2: [DGL-System]

4 Punkte

Löse

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} y \quad \text{mit} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: [Matrix-Exponentialfunktion]

4 Punkte

Bestimme die Einträge der Matrix $\exp(At)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a \neq b$$

und löse

$$y' = A \cdot y.$$

Aufgabe 4: [Fünffedersystem]

4 Punkte

Wir betrachten das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \\ & & & \frac{1}{4} & \\ & & & & \frac{1}{5} \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 9 & -4 & & & \\ -4 & 7 & -3 & & \\ & -3 & 5 & -2 & \\ & & -2 & 3 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} y = 0.$$

Die Frequenz ω ist eine *natürliche Resonanz* dieses Systems, wenn ein $y_\omega \neq 0$ existiert, für das

$$y(t) = y_\omega \cdot e^{-i \cdot \omega t}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Gib alle natürlichen Resonanzen des obigen Differentialgleichungssystems an. Beweise deine Behauptung.

(*) Aufgabe 5: [N-Feder-System]

4 Punkte

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & \frac{1}{3} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{N} & \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 2N-1 & -(N-1) & & & & & \\ -(N-1) & 2N-3 & -(N-2) & & & & \\ & -(N-2) & 2N-5 & -(N-3) & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -3 & 5 & -2 \\ & & & & & -2 & 3 & -1 \\ & & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} y = 0.$$

Gib alle natürlichen Resonanzen dieses Systems an. Beweise deine Behauptung.