



Zentrum für
Technomathematik

Analysis III
WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 4

Abgabe Dienstag, 18.11.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Faire Lottomaschinen]

4 Punkte

Wir betrachten eine Maschine zur Ziehung von n Lotto-Zahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel mit der Zahl k gezogen wird bezeichnen wir mit p_k . Die *Unordnung* einer Maschine ist definiert als die Größe

$$\left(\frac{1}{p_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{1}{p_2}\right)^{p_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}.$$

- a) Eine Maschine ist *tadellos*, wenn in jeder Ziehung eine der Kugeln gezogen wird, d.h.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Unter allen tadellosen Maschinen wird die als *fair* bezeichnet, welche die größte Unordnung hat. Wie sehen faire, tadellose Maschinen aus? Wieviele gibt es?

- b) Eine Maschine *klemmt ab und zu*, wenn

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq 1$$

gilt. Wie sehen faire, ab und zu klemmende Maschinen aus? Wieviele gibt es?

- c) Welcher Maschinentyp ist fairer? Anders: Ist für festes n die Unordnung der fairen, tadellosen oder die Unordnung der fairen, ab und zu klemmenden Maschine größer?

Aufgabe 2: [Pandaproblem]

4 Punkte

Vier Panda-Bären sitzen in den Ecken eines Quadrats. Von da bewegen sie sich mit gleicher, konstanter Geschwindigkeit in Richtung ihres (im mathematisch positiven Sinn) rechten Nachbarn.

- Auf welcher Bahn bewegen sich die Pandas?
- Wie lange brauchen die Pandas, bis sie sich treffen?
- Wie lang war der Weg?

Aufgabe 3: [Kaffeepausenproblem]

4 Punkte

Die Temperatur $\theta(t)$ einer Flüssigkeit in einer Tasse, welche in einem Zimmer mit der konstanten Lufttemperatur θ_A abkühlt, genügt unter gewissen Annahmen (von denen wir annehmen, dass sie erfüllt sind) der Differentialgleichung

$$\theta'(t) = -k(\theta(t) - \theta_A) \quad k > 0.$$

- a) Du möchtest heißen Kaffee *schnell* auf Trinktemperatur bringen. Gießt Du erst die Milch dazu und lässt den Kaffee dann weiter abkühlen, oder lässt Du ihn erst abkühlen und gießt die Milch direkt vor dem Trinken dazu? Nimm in grober Annäherung an die Realität an, dass der Kaffee heißer ist, als die Luft; und dass die Luft nicht kälter, als die Milch ist. Welche Trinktemperaturen sind in der Realität sinnvoll?
- b) Für welche speziellen Fälle ist es egal ob man zuerst mischt und dann kühlt oder umgekehrt vorgeht?

Du kannst annehmen, dass für zwei Flüssigkeiten mit Volumina V_1, V_2 und Temperaturen θ_1, θ_2 nach dem Mischen gilt

$$(V_1 + V_2)\theta_{1+2} = V_1\theta_1 + V_2\theta_2,$$

dabei bezeichnet θ_{1+2} die Temperatur des Gemisches.