



Zentrum für
Technomathematik

Analysis III
WS 2008/09
Prof. Peter Maaß
Kamil S. Kazimierski

http://www.math.uni-bremen.de/~kamilk/analysis_iii/

Übungsblatt Nr. 2

Abgabe Dienstag, 04.11.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: [Kreis noch einmal]

4 Punkte

Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4$$

und die Punkte

$$a = (-\sqrt{3} + 1) \quad b = 2.$$

- a) Zeige, dass eine Funktion f existiert, für die in einer Umgebung V von b gilt

$$f(b) = a \quad \text{und} \quad F(f(y), y) = 0 \quad \text{für alle } y \in V.$$

- b) Berechne

$$f'(b).$$

Aufgabe 2: [Implizite Funktionen]

4 Punkte

Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2e^{y_1} + x_1 y_2 - 4x_2 + 3 \\ y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

und die Punkte

$$a = (3, 2, 7) \quad b = (0, 1).$$

- a) Zeige, dass eine Funktion f existiert, für die in einer Umgebung U von a gilt

$$f(a) = b \quad \text{und} \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in U.$$

- b) Berechne

$$f'(a).$$

Aufgabe 3: [Satz von der impliziten Funktion]

4 Punkte

Ist der Satz von der impliziten Funktion scharf? Genauer: Existiert eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und Punkte $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ mit $F(a, b) = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \text{ nicht invertierbar,}$$

für die trotzdem eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von b existieren auf denen genau eine stetige Funktion $f : U \rightarrow V$ existiert mit

$$f(a) = b \quad \text{und} \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in U.$$

Beweise Deine Behauptung.

(*) Aufgabe 4: [Goldproduktion]

4 Punkte

Du bist der Herrscher einer antiken Stadt. Jeder Bürger deiner Stadt bringt Dir 1 Goldstück pro Viertelstunde ein. Sind die Bürger deiner Stadt zufrieden, so vermehren sie sich. Der in Stunden gemessene Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Geburten entspricht dem Kehrwert der Zufriedenheit deiner Bürger zum Zeitpunkt der ersten der beiden Geburten. Solange die Zufriedenheit nicht kleiner als 0.02 ist, sinkt sie mit jedem neuen Bürger um 0.02, sonst sinkt die Zufriedenheit auf Null ab und es werden keine neuen Bürger geboren.

- a) Du als Herrscher möchtest eine neue Kolonie gründen. Dazu brauchst Du 12 000 Goldstücke. Wann kannst Du dies frühestens tun, wenn die Geburt deines 110ten Bürgers gerade stattgefunden hat, die aktuelle Zufriedenheit 1.71 beträgt und in deiner Schatulle sich bereits 860 Goldstücke befinden?
- b) Kannst Du eine Formel oder einen Algorithmus angeben mit der sich die Wartezeit auf einen bestimmten Goldbetrag für allgemeine Werte der Startbürgerzahl, Zufriedenheit und schon vorhandenen Golds berechnen lässt? Die Formel oder der Algorithmus müssen nicht genau sein. Es reicht wenn Deine Lösung für Wartezeiten von bis zu drei Tagen bis auf wenige Minuten genau ist.